# 民用飞机线性参数变化动力学建模及 性能分析

高振兴\*, 傅骏

南京航空航天大学 民航学院, 江苏 南京 210016

摘 要:研究了一种可用于飞行特情分析和鲁棒增益调度控制的线性参数变化(LPV)动力学建模方法。基于函数替换方法,构建仿射参数依赖LPV模型,并采用遗传算法(GA)获得分解函数最优解。可针对性地选取调度变量,建立用于特情分析的LPV模型。仿真分析表明,LPV模型在偏离系统平衡点后仍能较好地复现系统动态;以扰动风特情飞行为例,LPV模型能够逼近非线性系统的动态响应;通过系统可达集分析表明,基于LPV模型的鲁棒增益调度控制器综合具有更小的保守性。

关键词:线性参数变化,函数替换,增益调度,遗传算法,飞行动力学

#### 中图分类号: V212.1 文献标识码: A DOI: 10.19452/j.issn1007-5453.2018.07.053

飞机动力学模型作为飞行控制系统的控制对象,它与 真实飞机的逼近程度对飞控系统的性能具有重要影响。良 好的动力学模型也是研究诸如大气扰动、舵面卡阻、异常构 型等若干特情飞行安全问题的重要基础。

基于平衡状态求得的小扰动线化模型,只能在平衡点 附近较准确地反映飞行状态,也难以准确描述特情飞行状 态。如在风切变等外部干扰下,飞行状态有时已远离系统平 衡点;发生舵面卡阻后,飞机控制面不对称,无法获得小扰 动模型<sup>[1]</sup>。对此,大型民用飞机往往针对飞行任务分段选取 多个小扰动模型,采用增益调度方法插值获得变化的控制增 益<sup>[2]</sup>。

近年来,以现代增益调度控制、反馈线性化为设计目标,出现了线性参数变化(Linear Parameter Varying, LPV) 模型。LPV 模型具有线化模型的特点,其系数矩阵是关于 一组调度变量的函数。调度变量可根据系统的可测量来定 义,使用中通过切换算法不断更新系数矩阵。对全量飞行动 力学模型进行合理降阶,并针对性地选择调度参数,可以构 建 LPV 模型,使其既能反映特情飞行的瞬时动态,又能适应 大范围飞行状态变化。

LPV 方法已成功应用于大型民用飞机<sup>13</sup>、无人机<sup>14,51</sup>、战斗机<sup>16,71</sup>、近空间超高声速飞行器<sup>181</sup>运动建模。主要有雅可比

线性化<sup>[3,4]</sup>、状态转移<sup>[3,6]</sup>、函数替换<sup>[3,7]</sup>等三种建模方法。雅 可比方法对全量模型在平衡点处采用一阶泰勒级数近似。 状态转移法通过偏微分计算,将非调度变量和控制输入表示 为调度变量的连续可微函数。这两种方法均须构建调度变 量的平衡点图,在平衡点之间通过插值计算更新状态。研究 表明,模型精度与选取的平衡点和相对平衡点的偏离程度有 关,且不具有超出平衡点图的外插能力<sup>[5,8]</sup>。函数替换法则 基于单个平衡点,将非线性系统表示为基本模型结构加分 解函数,通过优化计算获得分解函数。研究表明,函数替换 LPV 模型具有外插能力,能够比前两种模型更好地模拟系 统动态<sup>[5,9]</sup>。

本文拟采用函数替换法,研究一种既可用于特情飞行 动力学分析、也可用于现代增益调度控制的民用飞机 LPV 动力学模型。采用启发式遗传算法,解决函数替换法中分解 函数的非线性多维空间的寻优问题。在此基础上,通过时域 仿真、模态分析和系统可达集分析等手段,对 LPV 模型进行 全面的性能分析研究。

# 1 基于函数替换方法的民用飞机 LPV 建模

# 1.1 函数替换 LPV 建模方法

一类非线性系统可采用下述状态空间模型表示:

收稿日期:2018-05-28; 退修日期:2018-06-14; 录用日期:2018-06-25 基金项目:国家自然科学基金(U1533120);航空科学基金(20158052057) \*通信作者.Tel.:025-84891154 E-mail:z.x.gao@nuaa.edu.cn

引用格式: Gao Zhenxing, Fu Jun. Linear parameter varying dynamics modeling and performance analysis of civil aircraft [J]. Aeronautical Science & Technology, 2018, 29 (07): 53-58. 高振兴,傅骏. 民用飞机线性参数变化动力学建模及性能分析[J]. 航空 科学技术, 2018, 29 (07): 53-58.

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} k_1(z) \\ k_2(z) \end{bmatrix}$$
(1)

式中: $z \in R^{n_{t}}$ 为调度状态, $w \in R^{n_{w}}$ 为非调度状态, $u \in R^{n_{u}}$ 为 控制输入。调度状态、非调度状态及控制输入由式 (2)给出:

$$\begin{cases} \eta_z = z - z_0 \\ \eta_w = w - w_0 \\ \eta_u = u - u_0 \end{cases}$$
(2)

下标 0 为对应的平衡飞行状态,即选取 (*z*<sub>0</sub>, *w*<sub>0</sub>, *u*<sub>0</sub>) 为 常值参考点。将式 (2) 代入式 (1) 中,有:

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_{z} \\ \dot{\eta}_{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\eta_{z} + z_{0}) & A_{12}(\eta_{z} + z_{0}) \\ A_{21}(\eta_{z} + z_{0}) & A_{22}(\eta_{z} + z_{0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{z} \\ \eta_{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1}(\eta_{z} + z_{0}) \\ B_{2}(\eta_{z} + z_{0}) \end{bmatrix} \eta_{u} + F$$
(3)

式中:F是关于 ( $\eta_z, z_0, w_0, u_0$ )的分解函数,展开表达式为:

$$F = \begin{bmatrix} A_{11}(\eta_z + z_0) & A_{12}(\eta_z + z_0) \\ A_{21}(\eta_z + z_0) & A_{22}(\eta_z + z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(\eta_z + z_0) \\ B_2(\eta_z + z_0) \end{bmatrix} u_0 + \begin{bmatrix} k_1(\eta_z + z_0) \\ k_2(\eta_z + z_0) \end{bmatrix}$$
(4)

通过重新构造分解函数,将其描述为参数时变形式:

$$F = f(z)\eta_z = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix} \eta_z$$
(5)

将式(5)代入式(3)中,得:

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_z \\ \bar{\eta}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\eta_z + z_0) + f_1(\eta_z + z_0) & A_{12}(\eta_z + z_0) \\ A_{21}(\eta_z + z_0) + f_2(\eta_z + z_0) & A_{22}(\eta_z + z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z \\ \eta_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(\eta_z + z_0) \\ B_2(\eta_z + z_0) \end{bmatrix} \eta_u$$
(6)

#### 1.2 面向特情分析的 LPV 飞行动力学建模

选取具有开源气动数据的波音 747-100 飞机为研究实例<sup>[9,10]</sup>。 以升力系数为例,由 12 大项气动导数组成:

$$C_{L} = C_{L_{g}} + (\Delta C_{L})_{\alpha_{\text{WD,P}=0}} + \Delta \left(\frac{\mathrm{d}C_{L}}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{\alpha_{\text{WD,P}}} + \frac{\mathrm{d}C_{L}}{\mathrm{d}\hat{\alpha}} \left(\frac{\dot{\alpha}\overline{c}}{2V}\right) + \frac{\mathrm{d}C_{L}}{\mathrm{d}\hat{q}} \left(\frac{q\overline{c}}{2V}\right) + \frac{\mathrm{d}C_{L}}{\mathrm{d}n_{Z}} n_{Z} + K_{\alpha} \frac{\mathrm{d}C_{L}}{\mathrm{d}\delta_{e_{i}}} \delta_{e_{i}} + K_{\alpha} \frac{\mathrm{d}C_{L}}{\mathrm{d}\delta_{e_{o}}} \delta_{e_{o}} + \qquad(7)$$
$$\Delta C_{L_{\text{spoilers}}} + \Delta C_{L_{\text{out-ail}}} + \Delta C_{L_{fe}} + \Delta C_{L_{ge}}$$

针对动力学分析和飞控系统设计,可选取其中占主导 因素的气动导数项,并以此构建小扰动模型或简化非线性模 型。要对大气扰动、异常构型等飞行特情进行分析,可选择 加入气动模型的相关导数项。本文以建立纵向 LPV 模型为 例,选择调度变量为 [*V*, α, *h*]<sup>T</sup>,这些变量对气动导数的影响 占主导作用。对非调度变量俯仰角 θ进行一阶近似:

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \sin\theta_0 (\theta - \theta_0)$$
$$\sin\theta = \sin\theta_0 + \cos\theta_0 (\theta - \theta_0)$$

从而将纵向状态空间模型描述为仿射参数依赖形式加 剩余表达式的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{V} \\ \dot{h} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & A_{15} \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} & A_{25} \\ 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{35} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ V \\ h \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \sigma \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ 0 \\ D_{14} \\ 0 \end{bmatrix}$$
(8)

式中:所有矩阵项展开为:

$$\begin{split} & A_{14} = 1 - \frac{\overline{q}S\overline{c}}{2mV^2} (1.45 - 1.8x_{cg}) \cdot \frac{dC_L}{dq} \\ & A_{15} = \frac{\overline{g}}{V} (\sin \alpha \cos \theta_0 - \cos \alpha \sin \theta_0) \\ & A_{24} = -\frac{\overline{q}S}{m} \frac{\partial C_{D_{46}}}{\partial q} \Big|_0 \\ & A_{25} = -g(\cos \alpha \cos \theta_0 + \sin \alpha \sin \theta_0) \\ & A_{32} = \cos \alpha \sin \theta_0 - \sin \alpha \cos \theta_0 \\ & A_{35} = V(\cos \alpha \cos \theta_0 + \sin \alpha \sin \theta_0) \\ & A_{44} = \frac{c_7 \overline{q}S\overline{c}^2}{2V} \Big[ \frac{dC_m}{dq} - \frac{1}{\overline{c}} (1.45 - 1.8x_{cg}) \frac{dC_L}{dq} (x_{cg} \cos \alpha + z_{cg} \sin \alpha) \Big] + c_7 \overline{q}S \frac{\partial C_{D_{46}}}{\partial q} \Big|_0 \cdot (z_{cg} \cos \alpha - x_{cg} \sin \alpha) \\ & B_{11} = -\frac{K_a \overline{q}S}{mV} \Big( \frac{dC_L}{d\delta_{c_1}} + \frac{dC_L}{d\delta_{c_2}} \Big) \\ & B_{13} = -\frac{1}{mV} (\sin \alpha + 0.0436 \cos \alpha) \\ & B_{23} = \frac{1}{m} (\cos \alpha - 0.0436 \sin \alpha) \\ & B_{41} = c_7 \overline{q}S\overline{c}K_\alpha \Big\{ \frac{dC_m}{d\delta_c} + \frac{dC_m}{d\delta_{c_1}} - \frac{1}{\overline{c}} \Big[ \frac{dC_L}{d\delta_c} + \frac{dC_L}{d\delta_{c_2}} \Big] \cdot (x_{cg} \cos \alpha + z_{cg} \sin \alpha) \Big\} \\ & C_{11} = \frac{1}{V} (\sin \alpha \sin \theta_0 + \cos \alpha \cos \theta_0) \\ & C_{12} = -\cos \alpha \sin \theta_0 + \sin \alpha \cos \theta_0 \\ & D_{11} = -\frac{\overline{q}S}{mV} C_{L_g} (\alpha, M) \\ & D_{12} = -\frac{\overline{q}S}{m} C_{D_M} (\alpha, q_0, M, h) \\ & D_{14} = c_7 \overline{q}S\overline{c} \cdot \{C_{m_g} (\alpha, M) + \frac{1}{\overline{c}} [C_{D_M} (\alpha, q_0, M, h) \cdot (z_{cg} \cos \alpha - x_{cg} \sin \alpha)] \} \end{split}$$

采用函数替换方法,将状态矩阵中的非线性项以调度 变量的变化体现,并通过最优化方法寻找最佳目标函数,使 其与非线性系统的误差最小。将式(8)改写为:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta \dot{V} \\ \Delta \dot{h} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & A_{15} \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} & A_{25} \\ 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{35} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta V \\ \Delta h \\ q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_e \\ \Delta \sigma \\ \Delta T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$
(9)

[*F*<sub>1</sub>, *F*<sub>2</sub>, *F*<sub>3</sub>, *F*<sub>4</sub>, *F*<sub>5</sub>]<sup>T</sup>的完整非线性表达如式 (10) 所示。 通过对式 (10) 进行重构实现 LPV 建模。

$$\begin{bmatrix} F_{1} \\ F_{2} \\ F_{3} \\ F_{4} \\ F_{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{0} \\ V_{0} \\ h_{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{e_{0}} \\ \sigma_{0} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{e_{0}} \\ \sigma_{0} \\ T_{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [g] + \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ 0 \\ D_{14} \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} F_{1\alpha} & F_{1V} & F_{1h} \\ F_{2\alpha} & F_{2V} & F_{2h} \\ F_{3\alpha} & F_{3V} & F_{3h} \\ F_{4\alpha} & F_{4V} & F_{4h} \\ F_{5\alpha} & F_{5V} & F_{5h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta V \\ \Delta h \end{bmatrix}$$
(10)

## 1.3 遗传算法启发式寻优

式 (10) 有多种重构的方法,应构建优化问题,合理选取 系数矩阵。以 $F_1$  的线性化为例,对调度变量  $[V, \alpha, h]^T$  的选取 划分为  $i \times j \times k$  的网格形式。根据参考文献 [11] 可将求解 $F_{1\alpha}$ 、  $F_{1V}$ 、 $F_{1h}$  的问题转化为采用线性规划方法求解带绝对值约束的 最优化问题。但随着调度变量的增加和网格划分的细化,这一 多维空间寻优问题很难通过线性规划获得满意的最优解。本 文考虑采用遗传算法求解,将待优化问题表述为:

min  $\varepsilon$ 

s.t. 
$$\begin{cases} F_{1}(\alpha_{i}, V_{j}, h_{k}) = (\alpha_{i} - \alpha_{0})F_{1\alpha_{ijk}} + (V_{j} - V_{0})F_{1V_{ijk}} + (h_{k} - h_{0})F_{1h_{ijk}} \\ \sum_{i,j,k} \left|F_{1}(\alpha_{i}, V_{j}, h_{k}) - (\alpha_{i} - \alpha_{0})F_{1\alpha} - (V_{j} - V_{0})F_{1V} - (h_{k} - h_{0})F_{1h}\right| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$(11)$$

与线性规划相比,遗传算法求解速度较慢。但式(9) 的求解可由离线一次性计算获得,模型建立后则不再需要这 一寻优过程。

#### 2 函数替换 LPV 模型的性能分析

本节首先将 LPV 模型与非线性模型进行动力学响应 对比分析。其次,考察 LPV 模型的模态变化。最后,面向 LPV 增益调度控制,通过可达集分析来考察模型对实际非 线性系统的逼近能力。经配平计算,获得前飞平衡状态(见 表1),按上述方法求取 LPV 模型。

表 1 波音 747-100 配平状态参数 Table 1 Trim state parameters of Boeing 747-100

参数	配平值	单位
迎角 α	2.2859	0
空速 V	203	m/s
高度 H	7000	m
俯仰角速度 q	0	(°)/s
俯仰角 θ	2.2859	o
升降舵偏角 $\delta_e$	0	o
水平安定面偏角 σ	-0.9015	o
推力 T	74734	N

需要指出的是,LPV 建模方法中,平衡点的选取对仿真 结果会产生一定的影响,而如何选取尚缺乏理论依据。针对 飞行特情分析,建议将平衡点选取在无特情的正常稳定飞行 状态,如定常平飞/爬升/下降飞行、协调转弯等;针对鲁棒 增益调度控制,可基于参考航迹或参考姿态来选取平衡点, 该平衡状态实际就是控制目标。

# 2.1 LPV 模型动力学响应分析

考察非线性模型和 LPV 模型的动力学响应如图 1 所示,测试升降舵偏角 δ<sub>e</sub>的变化如图 1 (f) 所示。可以看出, LPV 模型与非线性模型的动力学响应符合较好。





根据参考文献 [12] 设计微下击暴流风切变风场,并在 LPV 建模中加入扰动风影响。图 2 为模拟穿越微下击暴流 的动力学响应。可以看出, LPV 模型的扰动风响应与非线 性模型的响应总体趋势一致,符合较好。





除上述仿真结果以外,本文还进行了多组动态响应测 试。为进一步量化 LPV 模型与非线性系统的差别,建立如 下性能指标:

$$J = \sum_{i=1}^{n_x} \frac{1}{t_f} \sum_{t=0}^{t_f} \frac{\left[ x_{\text{nl}(i)}(t) - x_{\text{LPV}(i)}(t) \right]^2}{S_i}$$
(12)

式中: *x*<sub>n1(i)</sub> 和 *x*<sub>LPV(i)</sub> 分别为两种模型的对应状态, *S<sub>i</sub>* 是每个 状态的归一化系数。分别对比了升降舵偏转 δ<sub>e</sub>、安定面偏转 σ、推力 *T* 变化三种测试激励下的响应, 见表 2。

	表 2 LPV 模型性能指标分析
Table 2	Performance index analysis of LPV model

测试项	$\delta_e$ 测试	$\sigma$ 测试	T测试
$J_1(\alpha)$	5.4517e-3	4.1317e-2	7.0691e-3
$J_2(V)$	1.9701e-4	1.0571e-4	7.5835e-5
$J_{3}\left(h ight)$	1.3273e-2	1.0467e-2	3.3673e-3
$J_{4}\left( q ight)$	2.0956e-2	1.2859e-1	5.0534e-3
$J_5 (\Delta  heta)$	4.1259e-3	1.1342e-2	1.1641e-3
J	4.4004e-2	1.9182e-1	1.6730e-2

通过多组试验数据对比分析表明,LPV 模型对非线性 系统逼近能力较强。只要合理地选取调度变量及其网格划 分,本文建立的 LPV 模型能够较好地符合非线性系统的动 力学响应,能够用于飞行特情分析。

# 2.2 LPV 模型的模态分析

与小扰动模型不同,LPV 模型的系统矩阵会随调度变 量的更新而变化。取迎角变化范围-2°~7°,空速变化范围 160~240m/s,获得 LPV 模型系统矩阵的特征根变化如图 3 所示。其中,图 3 (a) 和图 3 (b) 分别反映了系统长、短周期 模态变化。符号\*代表由空速变化引起的特征根变化,符号 o代表由迎角变化引起的特征根变化。可以看出,短周期模态 自然频率随空速的增大而增大,但受迎角的影响不大。长周期 模态自然频率的变化则相反。这与小扰动模型的模态分析结 论是一致的。与小扰动模型相比,LPV 模型的优势在于系统 模态随调度变量的更新而变化,一旦受扰动后的系统状态偏离 了设计平衡点,LPV 模型仍能够逼近系统的真实动态。





# 2.3 LPV 模型的可达集分析

面向 LPV 鲁棒增益调度控制,可利用包含非线性系统 可达集的椭圆体大小来判别 LPV 模型的性能优劣。对非线 性系统的若干 LPV 模型实现,若某个 LPV 模型具有包含非 线性系统可达集的最小椭圆,则运用该模型进行控制器综合 时,其设计保守性更小<sup>[13]</sup>。非线性系统的可达集定义为在 有限时间 *T* 内,有界能量的控制输入满足:

$$\int_0^1 u^{\mathrm{T}} u \mathrm{d}t \leqslant a^2 \tag{12}$$

系统状态的可达范围为:

$$R_{be} = \{x \mid \dot{x} = A(x)x + B(x)u, \ x(0) = 0, \ T \ge 0\}$$
(13)

通过求解 LPV 模型不变集,获得以调度变量为参数 坐标的超椭球体 (两个调度变量则退化为椭圆),若椭球 体的范围越小,则该 LPV 模型与非线性系统最接近。定 义 Lyapunov 函数小于 1 的状态量 x 的集合为不变集,如式 (14) 所示:

$$\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < 1 \}$$
(14)

若存在 Lyapunov 函数 V(x),使得下述不等式成立:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le \frac{1}{a^2} \|u(t)\|_2^2$$
(15)

则原非线性系统满足关系式(16):

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t} < 0 < \frac{1}{a^2} \left\| u(t) \right\|_2^2 \tag{16}$$

该 Lyapunov 函数下求解的线性系统不变集合包含原非 线性系统的可达集。取 Lyapunov 函数为二次型  $V(x) = x^T P x$ 。 对式(13)的求解可转化为线性矩阵不等式 LMI 标准 问题:

$$\sup_{P \in R^{mn}} \operatorname{Tr}(P)$$

$$\begin{bmatrix} A(x)^{\mathrm{T}} P + PA(x) & PB(x) \\ B(x)^{\mathrm{T}} P & -\frac{1}{a^{2}}I \end{bmatrix} < 0$$
(17)

选取调度变量范围 *a*<sub>i</sub>=[-2,-1, …, 12], *V*<sub>j</sub>=[150, 160, …, 270]。在不同 *a*<sub>i</sub> 和 *V*<sub>j</sub> 组合下求解不等式 (15), 可得矩阵 **P**<sub>k</sub>, 其中 *k*=*i*×*j*。选择迹最小的一组 **P**<sub>k</sub>值, 形成当前 *a*<sub>i</sub> 和 *V*<sub>i</sub>下的最小椭圆域。试验结果如图 4 所示。



图 4 LPV 模型的可达集分析 Fig.4 Reachable sets analysis of LPV model

图 4 显示了对非线性模型任选控制激励,其状态响应 均在椭圆域内。从图中可以看出,函数替换法建立的 LPV 模型能够逼近非线性模型,基于该模型设计的鲁棒增益调度 控制器的保守性更小。

#### 3 结论

本文研究实现了一种函数替换 LPV 飞行动力学模型, 采用遗传算法获得最优分解函数实现。通过仿真试验分析 认为, LPV 模型能够逼近非线性系统的动态特性,其可达集 范围逼近非线性系统可达集。与小扰动模型相比, LPV 模 型的模态随调度参数变化,能更好地模拟受扰动后偏离平衡 点的动态响应。研究民用飞机 LPV 建模方法具有两个作用:

(1)可用于特情飞行安全分析。在掌握飞机气动数据的前提下,面向飞行特情,针对性地选取 LPV 模型的调度变量并建立特情 LPV 模型,从而可进行特情模拟和分析。

(2)可作为鲁棒增益调度控制对象,开展相关控制算法研究。而仿射参数依赖形式的 LPV 模型也能够降低增益调度控制的算法设计难度。

#### 参考文献

- Thomas J, William L, Christine B, et al. Development of a dynamically scaled generic transport model testbed for flight research experiments[R]. NASA 23–728–30–33, 2003.
- [2] Stevens B L. Aircraft control and simulation[M]. New York: John Wiley and Sons, 2003.
- [3] Andres M, Gary J B. Development of linear parameter varying models for aircraft [J]. Journal of Guidance, Controland Dynamics, 2004, 27 (2): 218–228.
- [4] 宗群,吉月辉,窦立谦,等.无人机侧向系统 LPV 模型降阶 [J]. 控制与决策, 2010, 25 (6): 948-952.
   Zong Qun, Ji Yuehui, Dou Liqian, et al. LPV model reduction of UAV lateral system[J]. Control and Decision, 2010, 25 (6): 948-952. (in Chinese)
- [5] Balint V, Tamas P, Zoltan S. Fault tolerant LPV control of the GTM UAV with dynamic control allocation[C]// AIAA Guidance, Navigationand Control Conference, 2014.
- [6] Papageorgiou G, Glover K D. Analysis and flight testing of a robust gain scheduling controller for the VAAC harrier[R]. University of Cambridge, TR-368, 2000.
- [7] Bhattacharya R, Balas G J, Kaya M A, et al. Nonlinear receding

horizon control of an F-16 aircraft[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2002, 25 (5): 924–931.

- [8] Huang Y, Sun C, Qian C, et al. Linear parameter varying switching attitude control for a near space hypersonic vehicle with parametric uncertainties[J]. International Journal of Systems Science, 2014, 46 (16): 1–13.
- [9] Rodney Hanke C. The simulation of a large jet transport aircraft Volume I: Mathematical model[R]. NASA CR-1756, 1971.
- [10] Rodney Hanke C, Donald R N. The simulation of a jumbo jet transport aircraft Volume II: Modeling data[R]. NASA CR-114494, 1970.
- [11] 于剑桥,胡国怀,别炎华.采用函数替换方法建立导弹准线性 化模型[J].北京理工大学学报,2009,29(5):390-393.
  Yu Jianqiao, Hu Guohuai, Bie Yanhua. Development of missile quasi-linear model using function substitution method[J].
  Transactions of Beijing Institute of Technology, 2009, 29(5):

390-393. (in Chinese)

- [12] Gao Zhenxing, Gu Hongbin, Liu Hui. Real-time simulation of large aircraft flying through microburst wind field[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2009, 22 (5); 459–466.
- [13] Jong-Yeob Shin. Analysis of linear parameter varying system models based on reachable sets[R]. NASA CR-2001-211231, 2001.

### 作者简介

高振兴(1982-) 男,博士,副教授。主要研究方向:飞行动 力学与控制。 Tel:025-84891154 E-mail:z.x.gao@nuaa.edu.cn 傅骏(1990-) 男,博士研究生。主要研究方向:旋翼机动 力学建模与控制。 Tel:025-84893501

E-mail: fujunriver@gmail.com

# Linear Parameter Varying Dynamics Modeling and Performance Analysis of Civil Aircraft

#### Gao Zhenxing\*, Fu Jun

College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China

**Abstract:** A kind of Linear Parameter Varying (LPV) modeling method was studied used for special flight situation analysis and robust gain scheduling control. An affine parameter dependent LPV model was built based on function substitution method. Furthermore, the optimum solution of decomposing function was solved by Genetic Algorithm (GA). In this way, a special situation LPV model can be built by selecting specific scheduling parameters accordingly. Simulation analysis shows that the LPV model can reproduce system dynamics once deviating from the equilibrium point. Taking flying through turbulent wind as an example, the dynamic response of LPV model can approximate nonlinear system. The ellipsoids reachable sets analysis results also show that robust gain scheduling controller synthesis would be less conservative based on the LPV model.

Key Words: LPV; function substitution; gain scheduling; GA; flight dynamics

 Received:
 2018-05-28;
 Revised:
 2018-06-14;
 Accepted:
 2018-06-25

 Foundation item:
 Natural Science Foundation of China (U1533120);
 Aeronautical Science Foundation of China (20158052057)

 \*Corresponding author.Tel.:
 025-84891154
 E-mail:
 z.x.gao@nuaa.edu.cn