

单点金刚石车削非球曲面测量数据样条拟合算法研究*

The Fitting Algorithm of Measuring Data for Single-Point Diamond Turning Aspheric Surface

李成贵 / 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院

杨辉 / 精密制造技术航空科技重点实验室

摘要: 在分析离散数据插值与逼近方法的基础上, 讨论了B-样条拟合算法; 并针对超精密非球曲面的测量数据, 分析了B-样条拟合算法的拟合误差与阶次的关系, 同时与多项式最小二乘拟合做了比较。对比结果表明, B-样条拟合能达到更高的精度, 并建议在非球曲面拟合中采用4阶次B-样条、51个控制节点, 能达到较好的拟合效果。

关键词: 非球曲面; 超精密加工; B-样条拟合; 插值算法

Keywords: aspheric surface; ultra-precision machining; B-spline fitting; interpolating algorithm

0 引言

在实际加工中, 大多非球面形曲线并不能按数学公式给出, 而是要依靠一些离散的值点描绘其大致走向。为了进一步分析其几何性质, 通常在加工这些曲线时, 需要将离散的值点连续化, 形成一条符合要求的曲线, 并用数学方程式进行描述, 这个过程叫做曲线的拟合。本文将重点研究超精密非球加工中的B-样条拟合算法, 并与多项式拟合进行比较, 给出实验结果。

1 插值与逼近

给定一组有序的数据点 $P_i (i=0, 1, \dots, n)$, 要求构造一条“连续”曲线, 且顺序通过这些数据点, 称为插值(interpolating), 所构造的曲线称为插值曲线; 把曲线插值推广到曲面, 称为插

值曲面。

在某些情况下, 测量所得的数据点本身并不精确, 要求构造一条曲线严格通过给定的一组数据点就没什么意义。合理的做法是, 构造一条曲线使之最为接近给定的数据点, 称为逼近(approximating), 所构造的曲线叫做逼近曲线。在插值与逼近之前, 先要数字化数据, 即描述曲线或曲面的离散数据点集, 数字化数据的来源方式有三种:

- 1) 根据曲线的原始方程计算其坐标数据;
- 2) 由实验方式取得;
- 3) 由测绘方法所得。

2 B-样条曲线拟合算法

B-样条曲线是最常用的样条曲

线, 它可以给出非常光滑的插值曲线, 因此在数值逼近等科学和工程计算中应用广泛。此处, 采用B-样条曲线拟合非球面测量数值点, 并通过仿真验证该方法的优缺点, 以期找到更合适的拟合参数分析测量数据。

已知 $n+1$ 个控制点 $P_i (i=0, 1, \dots, n)$, 称为特征多边形的顶点, 则把 n 次参数曲线段

$$P(t) = \sum_{l=0}^n P_l F_{l,n}(t) \quad (1)$$

称为B-样条曲线段。式中

$$F_{l,n}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n+1}^j (t+n-l-j)^n \quad (2)$$

而

$$C_{n+1}^j = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \quad (3)$$

一般地讲, 由空间的 $n+1$ 个控制点生成的 k 阶B-样条曲线是由 L 段B-样

* 2010年教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

条曲线逼近而形成的,每个曲线段的形状由点列中 k 个顺序排列的点所控制;由不同节点向量构成的均匀B-样条函数所描绘的形状相同,可看成是同一个B-样条函数的简单平移。工程实践中常用的B-样条曲线是低于三次的B-样条曲线,下面介绍三次B-样条算法。

当 $n=3$ 时,由式(2)得

$$F_{0,3}(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)$$

$$F_{1,3}(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4)$$

$$F_{2,3}(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$

$$F_{3,3}(t) = \frac{1}{6}t^3$$

代入式(1),得到由四个控制点产生的三次B-样条曲线为

$$P(t) = \frac{1}{6}[(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)t^3 + (3P_0 - 6P_1 + 3P_2)t^2 + (-3P_0 + 3P_1)t + (P_0 + 4P_1 + P_2)]$$

3 拟合算法试验分析

利用三坐标测量仪和LVDT测头测量原理的相似性,采用三坐标仪测量非球面表面数据验证上述算法,测得图形如图1所示。

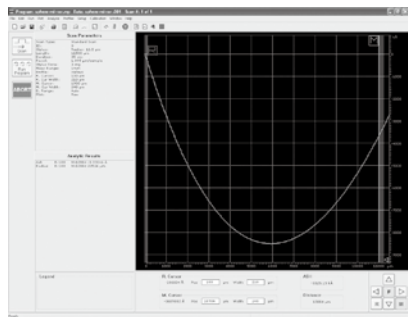


图1 三坐标测量仪测量表面曲线图

1) B-样条拟合

在进行B-样条拟合时,关键要选

择好拟合阶次和控制顶点数。首先比较不同控制顶点数和阶次数的拟合情况,以其拟合误差选择最优的拟合次数和控制顶点数。

以三坐标仪测量数据,用不同控制顶点数、阶次拟合后所产生的误差曲线分别示于图2、图3和图4中。比较图中各曲线可知,随着拟合阶次和控制顶点数的增加,平均误差有减小的趋势,但增加控制点数和拟合阶次会大大增加计算的复杂程度。因此,兼顾精度和计算

复杂程度,拟合阶次为四,即三次B-样条,控制点数为51最适合。

2) 多项式最小二乘拟合

多项式的最小二乘拟合是数学运算中最普及的方法之一,此处探讨采用多项式拟合三坐标测量仪测量的数据,具体的拟合算法参见文献[3]。分别采用51个和203个数据坐标点进行四次多项式拟合,拟合图形见图5,拟合误差曲线如图6所示。

拟合后方程分别为:

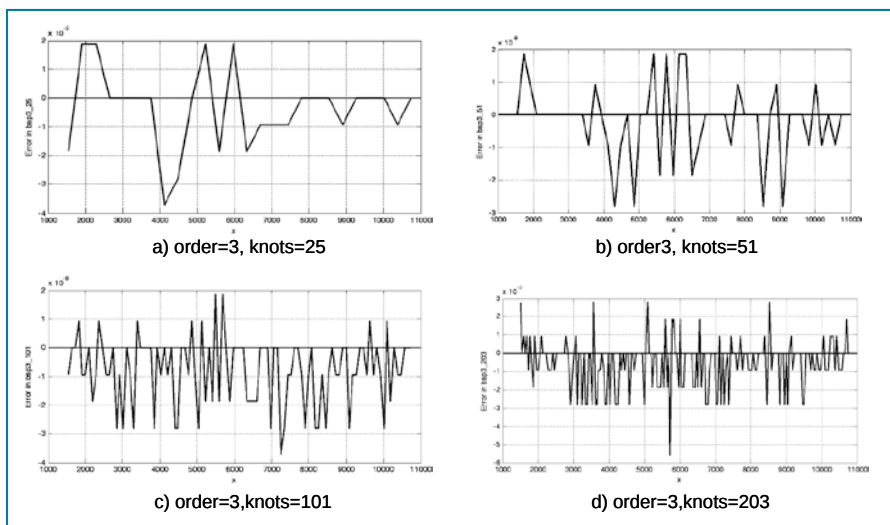


图2 不同节点(knots)数的三阶B-样条拟合曲线误差对比

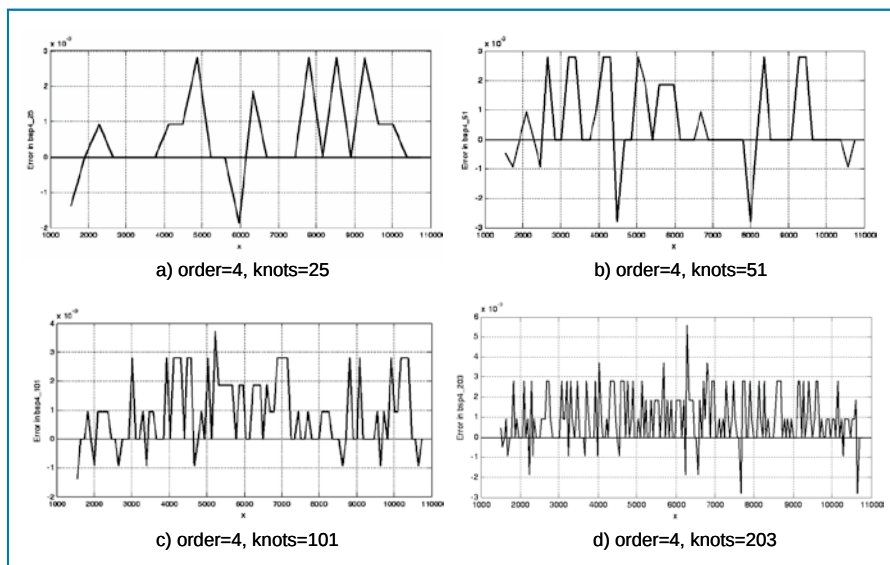


图3 不同节点(knots)数的四阶B-样条拟合曲线误差对比

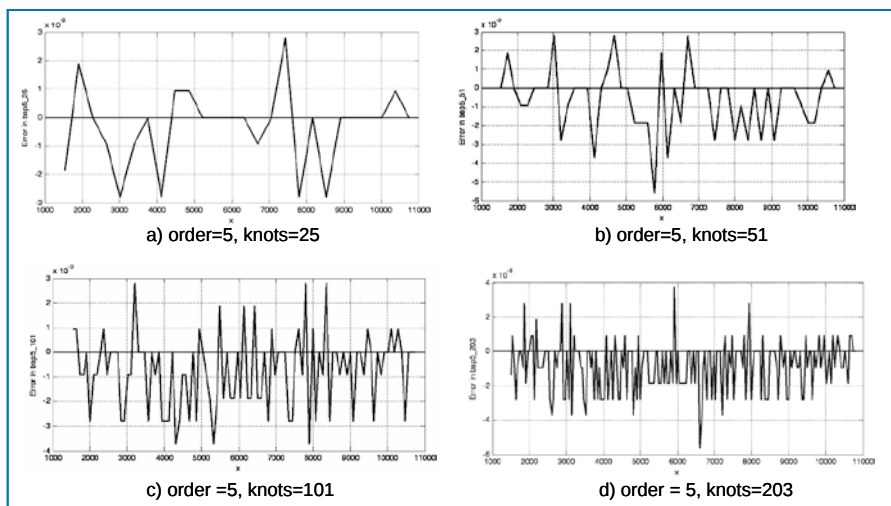


图4 不同节点(knots)数的五阶B-样条拟合曲线误差对比

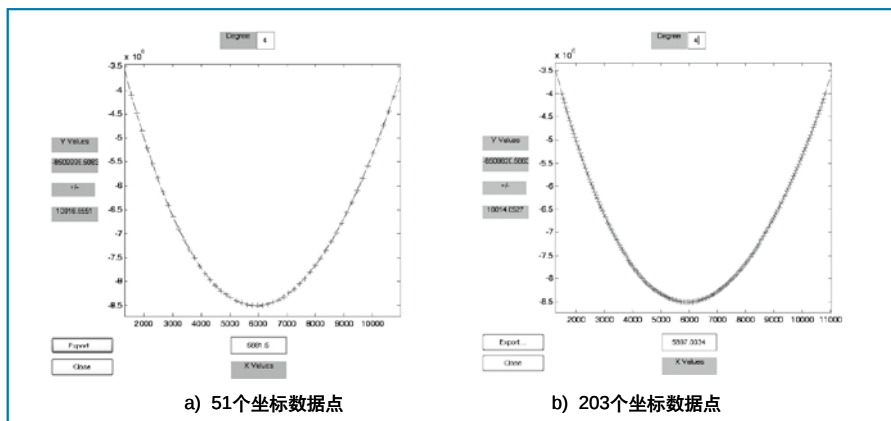


图5 四次多项式拟合对比图

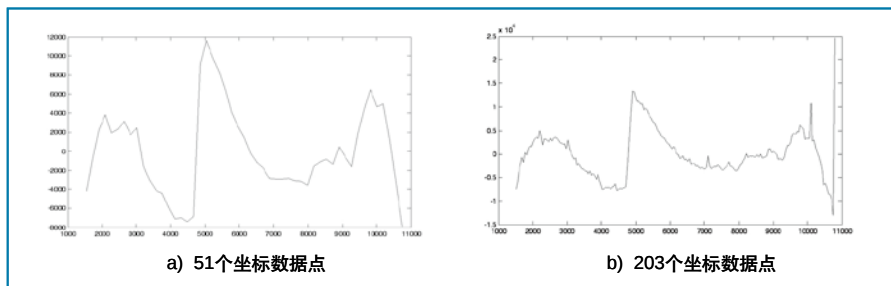


图6 多项式拟合误差图

$$Y_{51} = 0.000000000293041x^4 - 0.000011820433112x^3 + 0.352920872280117x^2 - 3174.4034556249912x + 6252.152632326937$$

$$Y_{203} = 0.000000000312755x^4 - 0.000012274301264x^3 + 0.356540765826365x^2 - 3186.0495093533154x + 18781.038958318062$$

从拟合曲线图5可以看出,多项式拟合的数据点均匀分布在拟合曲线两边,达到了较好的拟合效果,但是对比多项式拟合和B-样条拟合的误差,不

难发现多项式拟合的精度要低于B-样条拟合。另外B-样条还可以表示较为复杂的曲线和曲面,且局部可控,在这点上多项式是无法比拟的。从而可知,采用

B-样条拟合算法在非球表面面形测量数据的处理上具有很大的优势。

4 结论

在分析B-样条理论算法的基础上,采用三坐标测量仪测量超精密非球面元件表面的数据,分析验证B-样条拟合算法的精度和阶次。与采用多项式最小二乘拟合方法对比后,结果表明B-样条拟合能达到更高的精度,采用4阶次即三次B-样条,51个控制节点能达到很好的拟合效果,这对在线检测数据拟合处理和超精密加工补偿技术的研究有一定的意义。

参考文献

- [1] 叶伯生,杨叔子. CNC系统三次B-样条曲线的高速插补方法研究[J]. 中国机械工程,1998(3):42~43.
- [2] 施法中.计算机辅助几何设计与非均匀有理样条[M].北京:北京航空航天大学出版社,1994.
- [3] 苏步青,刘鼎元.计算几何[M].上海:上海科学技术出版社,1981.
- [4] Bedi S, and Quan N. Spline interpolation technique for NC machines [J]. Computers in industry, 1992, 18:307-313
- [5] Wang F C. Nearly arc-length parameterized quintic-spline interpolation for precision machining [J]. Computer Aided Design, 1993, 25:282-287.
- [6] Lartigue C, Thiebaut F, Maekawa T. CNC tool path in term of B-spline curves [J], Computer - Aided Design, 2001, 33: 307~319.

作者简介

李成贵,博士,副教授,从事微纳米表面形貌测量和特征评价技术研究。