



微分对策制导*

The Differential Game Guidance

罗生 宋龙 / 中国空空导弹研究院

摘要:介绍了微分策略制导的原理,在导弹和目标均为一阶时间延迟下应用伴随方法推导出微分对策制导的公式,通过与扩展比例引导、单边最优制导的仿真比较,考察脱靶量和控制能量两个指标,得出微分策略制导在理论上的先进性。

关键词:微分对策;制导律;最优控制

Keywords: differential games; guidance law; optimal control

0 引言

20世纪50年代,由于制导系统拦截飞行器的引入、人造卫星的发射和航天领域有关机动追击问题的需要,美国数学家Issacs组织开展了对抗双方都能自由决策行动的理论追逃问题研究,并取得了突破性的成果。1965年,Issacs整理出版了世界上第一部微分对策著作《微分对策》。1971年,美国科学家Friedman采用两个近似离散对策序列精确定义了微分对策,建立了微分对策值与鞍点存在性理论,从而奠定了微分对策理论的数学基础。

微分对策因其理论上的最优性,已应用于战术导弹的制导律设计。Tahk等人设计了利用梯度法求微分对策制导的数值解,但模型极为复杂。Basar设计了神经网络微分制导律,但不能实时计算。汤善同院士采用微分对策强迫奇异摄动方法设计了零阶组合反馈制导律,易于在弹上实时实现,但其主要是针对有强地面雷达指示的防空导弹而设计的。

本文采用伴随理论,解决终端控制的最优制导问题,避免了必须对矩阵方程式的直接求解,并通过仿真验证了所设计制导律的性能。

1 微分对策原理

1.1 微分对策模型

微分对策属于双边的最优控制问题,其状态方程可以写成:

$$\dot{x} = Fx + Gu + Cw \quad (1)$$

其中, x 为状态变量, u 为导弹控制策略, w 为目标机动策略, F 、 G 、 C 为状态矩阵。

初始条件 $x(0)=x_0$, 性能指标函数:

$$J(u, w) = \frac{1}{2} \int_0^T [x^T(t)P(t)x(t) + u(t)R(t)u(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt + x^T(T_f)P(T_f)x(T_f) \quad (2)$$

其中, $P(t)$ 、 $R(t)$ 、 γ 为加权矩阵。

1.2 微分对策定义

假设在 t_0 时刻, 目标和导弹都知道对方在 $t < t_0$ 时刻的所有信息。如果在 t_0 时刻导弹首先采取机动策略 u_1 , 然后目标根据导弹机动, 采取最优

规避机动策略 w_1 , 此时指标函数为 $\min_u \max_w J = J(u_1, w_1)$ 。这种条件下, 导弹拦截目标的过程中将消耗最大能量, 即有 $J(u_1, w_1) = J_{\max}$ 。如果在 t_0 时刻目标首先采用机动策略 w_2 , 然后导弹根据目标机动, 采取最优制导拦截机动策略 u_2 , 此时指标函数为 $\min_w \max_u J = J(u_2, w_2)$ 。这种条件下, 导弹拦截目标将消耗最小能量, 即有 $J(u_2, w_2) = J_{\min}$ 。综合以上两种情况, 必有 $\min_u \max_w J \geq \min_w \max_u J$, 也就是存在 $J(u_1, w_1) \geq J(u_2, w_2)$ 。

2 制导律的推导

2.1 制导模型

假设导弹和目标都为二阶系统, 导弹时间常数为 T , 目标时间常数为 Θ , 相对距离为 e , 相对速度为 $\dot{e}$, 导弹加速度 u_1 , 目标加速度指令 w , 目标机动加速度 w_1 。图1所示为制导律模型。

可以写出状态方程:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \quad (3)$$

$$\text{其中, 状态变量 } x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ u_1 \\ w_1 \end{bmatrix},$$

* 航空科学基金资助项目 (20090112002)

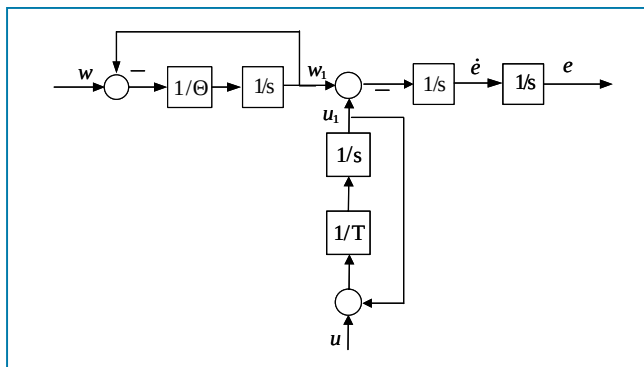


图1 制导律模型

$$\text{状态矩阵 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Theta} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\Theta} \end{bmatrix}$$

根据微分对策原理写出性能指标函数:

$$\min_u \max_w J = x^T(t_f)P(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^2(t) - \gamma^2 w^2(t)] dt \quad (4)$$

若只对末端脱靶量进行要求,

$$\text{可令 } P(t_f) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时,性能指标函数可以简化为

$$\min_u \max_w J = \frac{b}{2} x_1^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^2(t) - \gamma^2 w^2(t)] dt$$

2.2 制导律求解

对于单边最优的制导问题,可以在脱靶量为零、能量消耗最小的前提下,应用施瓦茨不等式求出解析解,但这种方法无法解决微分对策的双边最优问题。这里应用一种在脉冲仿真中常用的方法——伴随方法对微分对策进行求解。

应用伴随理论,写出原系统状态方程的伴随方程:

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda \quad (5)$$

$$\text{其中伴随矩阵 } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\Theta} \end{bmatrix}$$

根据伴随理论求解,则可以得到 $\dot{\lambda}$,即分量

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{T}, \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_2 + \frac{\lambda_4}{\Theta},$$

考虑末端只对脱靶量进行要求,则末端伴随状态为

$$\lambda_1(t_f) = bx_1(t_f)$$

$$\lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0$$

λ_1 为常数,令 $\lambda_1 = \lambda bx_1(t_f)$,则可得到

$$\lambda_2 = bx_1(t_f)(t_f - t)$$

$$\lambda_3 = bx_1(t_f)[(t_f - t)T - T^2 + T^2 e^{(t-t_f)/T}]$$

$$\lambda_4 = bx_1(t_f)[(t_f - t)\Theta - \Theta^2 + \Theta^2 e^{(t-t_f)/T}]$$

把 $\dot{\lambda}$ 和 λ 代入伴随方程(5),解得导弹和目标的最优策略分别为

$$u = -bx_1(t_f)[(t_f - t) - T + Te^{(t-t_f)/T}] \quad (6)$$

$$w = \gamma^{-2} bx_1(t_f)[(t_f - t) - \Theta + \Theta e^{(t-t_f)/T}] \quad (7)$$

把方程(6)代入状态方程(3)中,并对其进行积分,设

$$h = \frac{\tau}{T}, \quad \bar{h} = \frac{\tau}{\Theta}, \quad \tau = t_f - t, \text{ 可以得到微分对策制导律表达式为}$$

$$u = -(g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4) \quad (8)$$

$$\text{其中, } g_1 = \frac{1}{\tau^2} \times \frac{6h^2(h-1+e^{-h})}{den}, \quad g_2 = \frac{1}{\tau} \times \frac{6h^2(h-1+e^{-h})}{den}$$

$$g_3 = \frac{6(h-1+e^{-h})^2}{den}, \quad g_4 = \left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^2 \frac{6(h-1+e^{-h})(h-1+e^{-h})}{den}$$

$$den = 2(1-\gamma^{-2})h^2 + 3 + 6h - 12e^{-h} - 3e^{-2h} + \frac{6}{T^3 b} + \gamma^{-2} f(\bar{h}, h)$$

$$f(\bar{h}, h) = -3\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^3 + 6\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)h + 12\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^2 h e^{-\bar{h}} + 3\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^3 e^{-2\bar{h}}$$

3 仿真验证

为了验证所设计微分制导律的性能,用matlab搭建二维线性拦截模型,对扩展比例制导(APN)、单边最优制导(OPN)、微分对策制导(DOPN)进行仿真验证。

3.1 仿真条件

1) 制导律类型

a) 扩展比例制导(APN)

$$u = 3V_c \dot{q}(t) + 0.5wt_{go}^2, \quad t_{go} = t_f - t;$$

b) 单边最优制导

$$u = \frac{N'}{t_{go}^2} [R + vt_{go} + 0.5wt_{go}^2 - n_1 T^2 (e^{-h} + h - 1)], \quad t_{go} = t_f - t,$$

其中,

$$N' = \frac{6h^2(e^{-h} + h - 1)}{2h^3 + 3 + 6h - 6h^2 - 12he^{-h} - 3e^{-2h}};$$



c) 微分对策制导(DOPN)

$$u = -(g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4),$$

其中式(6)、(7)中取 $\gamma=2.75$; $b=1000$ 。

2) 目标机动类型

为了充分验证制导律对目标的攻击能力,选取阶跃机动、正弦机动和B_B机动作为评估基准,具体模型如下:

a) 阶跃机动 $w=A_m$;

b) 正弦机动 $w=A_m\sin(\omega t)$,

取 $\omega=1\text{rad/s}$;

c) B_B机动

$$w = \begin{cases} A_m & 2kT < t < (2k+1)T \\ -A_m & kT < t < 2kT \end{cases}$$

$$k=0, 1, 2, 3.$$

仿真中目标机动幅值 $A_m=9g$,在总飞行时间 t_f 为0.5s和5s情况下分别进行仿真。

3) 其他初始条件

弹目相对速度 $V_c=600\text{m/s}$,导弹过载限幅 $u_{\max}=30g$,一阶导弹时间常数 $T=0.3\text{s}$,一阶目标时间常数 $\Theta=0.5\text{s}$ 。

3.2 仿真结果

表1为三种制导律对于不同机动目标的拦截仿真结果,表中列出脱靶量情况。

表1 仿真结果

t_f/s	目标机动	脱靶量/m		
		APN	OPN	DOPN
0.5	阶跃	0.71	0.31	0.13
	正弦	0.50	0.31	0.15
	B_B	0.72	0.31	0.14
5	阶跃	0.11	0.10	0.10
	正弦	1.42	0.32	0.11
	B_B	5.86	0.28	0.10

图2、图3为目标阶跃机动情况下导弹过载响应曲线,图4、图5为目标B_B机动情况下导弹能量消耗曲线。

3.3 结果分析

1) 脱靶量: DOPN脱靶量最小, OPN稍大, APN最大;

2) 能量消耗: 定义能量消耗衡量指标为 $J_0=\int_{t_0}^t u^2 dt$,从图2~图5可以看出, DOPN的能量消耗最小, OPN比DOPN稍大, APN最大。

3) 过载响应: DOPN的过载响应在遇靶瞬间归零,即已经顺利完成拦截。可见, DOPN是一种更高级的制导律。

4 结 论

通过仿真分析可见,对多种形式的目标机动而言,微分对策制导具有制导精度高和能量消耗小等优点,具有广泛

的应用前景。但其自身也存在缺点,如形式复杂、需要较多的信息等,这些是微分对策能否实际应用的关键。 **AST**

参考文献

- [1] Isaacs R. Differential Games[M]. New York: John Wiley & Sons, 1965.
- [2] Friedman A. Differential Games[M]. New York: John Wiley, 1971.
- [3] Cherry G W. A General Explicit, Optimizing Guidance Law for Rocket-Propellant Spacecraft[R]. AIAA Paper 64-638, 1964.
- [4] Shaw R L. Fighter Combat. The Art and Science of Air-to-Air Warfare, 2nd ed., Patrick Stephens, Wellingborough, England, U.K., 1988.
- [5] Tahk M J, Ryu H, Kim J G. An Iterative Numerical Method for a Class of Quantitative Pursuit-evasion Games[J]. AIAA Conference on Guidance, Navigation, and Control, Boston, Mass, 1998.
- [6] Basar T, Olsder G J. Dynamic Noncooperative Game Theory. Philadelphia: SIAM, 1999.
- [7] 汤善同. 微分对策制导规律与改进的比例导引制导规律性能比较[J]. 宇航学报, 2002, 23 (6): 38-42, 61.
- [8] Ben-Asher J Z, Yaesh I. Advances in Missile Guidance Theory. AIAA, Reston, VA, 1998.
- [9] Shneydor N A, Missile Guidance and Pursuit, Kinematics, Dynamics and Control, Horwood Publishing, Chichester, England, U.K., 1998.
- [10] 张嗣瀛. 微分对策[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [11] 李登峰. 微分对策及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [12] Lipschutz M M. Differential

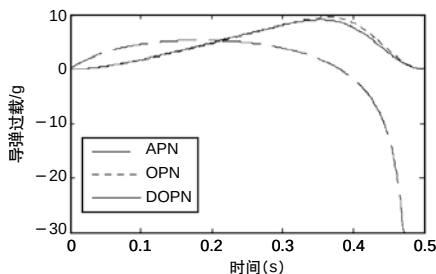


图2 目标阶跃机动下导弹过载响应

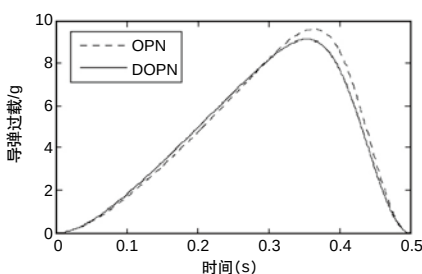


图3 目标阶跃机动下导弹过载响应

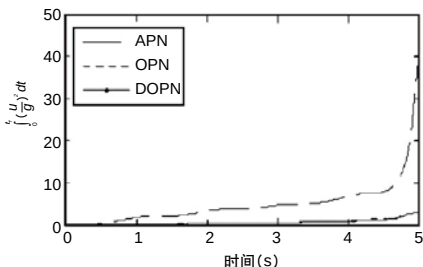


图4 目标B_B机动下导弹能量消耗

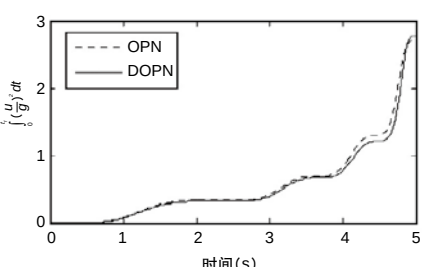


图5 目标B_B机动下导弹能量消耗



可变形翼战术导弹飞行动力学联合仿真研究*

Study on Flight Dynamics Collaborative Simulation of Morphing Wing Tactical Missile

张公平 廖志忠 段朝阳 张燕 / 中国空空导弹研究院

摘要: 基于集中质量假设发展的一套适于可变形翼导弹的多体运动模型, 以附加惯性项及快变气动参数的形式来反映弹翼变形对导弹动态特性的影响, 涉及交叉求解不同弹翼外形对应的气动特性及运动方程。由此提出的一种基于Missile DATCOM与MATLAB/SIMULINK的联合仿真方法, 应用于典型轴对称导弹的变翼动态特性研究中, 快速有效。

关键词: 可变形翼; 战术导弹; 飞行动力学; 联合仿真

Keywords: morphing wing; tactical missile; flight dynamics; collaborative simulation

0 引言

可变形翼是指翼面形状或剖面形状可受控变化的机翼或弹翼^[1]。早在1903年, 莱特兄弟就利用受控扭曲的机翼来抑制飞机横滚, 从而成功实现人类首次有动力载人连续飞行^[2]。美国F-14变后掠翼战斗机与俄罗斯图-160变后掠翼轰炸机均为性能优越的变翼军用飞机^[3]。

弹翼外形随飞行环境合理变化能有

效提高导弹的飞行性能, 但弹翼运动会使导弹飞行呈现耦合的多体特性, 并引发气动力瞬变。

变翼导弹研究目前多处于概念阶段, 尚未涉及非线性耦合多体动力学建模与瞬变气动力作用的交叉求解问题。本文提出的一种基于Missile DATCOM与MATLAB交互的联合仿真方法, 揭示了弹翼变形对导弹动态特性的影响机理, 为进一步的动态模型简化及控制系

统设计奠定基础。

1 多刚体动力学建模

不考虑弹性变形, 则可变形翼导弹为无根树多刚体系统, 其总动量及其对全弹质心的动量矩为:

$$\begin{cases} P = mV \\ H_o = J\omega \end{cases} \quad (1)$$

式中, m 为计及弹翼质量(m_w)与弹体质量(m_b)的全弹质量; V 为导弹质心

Geometry, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1969, Chap. 5.

[13] Chiou Y C, Kuo C Y. Geometric Approach to Three-Dimensional Missile Guidance Problem[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 335-341.

[14] Kuo C Y, Chiou Y C. Geometric Analysis of Missile Guidance Command [J]. IEE Proceedings: Control Theory and Applications, 2000, 147(2): 205-211.

[15] Kuo C Y, Soetanto D, Chiou Y C. Geometric Analysis of Flight Control Command for Tactical Missile Guidance[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2001, 9(2): 234-243.

[16] Lin C -F. Modern Navigation Guidance and Control Processing, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1991.

[17] Serakos D, Lin C -F. Three Dimensional Mid-Course Guidance State Equations[C]. Proceedings of the 1999

American Control Conference, American Automatic Control Council, San Diego, CA, 1999: 3738-3742.

作者简介

罗生, 工程师, 研究方向是导弹制导与控制。

宋龙, 研究员, 研究方向是导弹制导与控制。