航空科学技术
Aeronautical Science & Technology
Oct. 25 2023 Vol. 34 No.10 42-57

基于二维抽样优化的复合材料超椭圆板与穿孔板振动优化设计

段雷，景钊
西北工业大学，陕西 西安 710072

摘 要：复合材料超椭圆板与穿孔板被广泛应用于工程结构中，控制其固有振动频率可有效避免共振。本文基于二维抽样优化算法（2DSO）优化了复合材料超椭圆板和穿孔矩形板的铺层序，以使其振动基频最大。2DSO由抽样优化和分层优化算法（LOA）组成，充分利用了层合板层压参数降维技术、弯曲刚度敏度及其线性叠加特性。在抽样优化阶段，先基于动态距离约束获得一个抽样优化解，然后基于该解通过LOA进行了铺层序优化直至获得最终优化铺层序。之后采用基于经典层合板理论的里兹法求解了复合材料层合板的振动基频，并利用2DSO优化了不同边界条件和长宽比的复合材料超椭圆板和穿孔板铺层序，优化结果表明二维抽样优化算法高效、稳定且具有良好的鲁棒性。

关键词：二维抽样优化算法；铺层序优化；复合材料超椭圆板；复合材料穿孔板；振动；里兹(Ritz)法

中图分类号： **文献标识码：**A **DOI：**10.19452/j.issn1007-5453.2023.10.007

碳纤维树脂基增强复合材料以其高比强度、高比刚度及轻量化设计潜力，广泛应用于航空、航天、船舶、汽车工程等领域[1-5]。振动是工程结构最常见的动力学问题，如飞机机翼的颤振[6]、桥梁的共振[7]、车轮的抖振[8]等。复合材料层合板作为结构中的基本构件，通过优化使其振动基频最大化有助于提升结构抗共振特性。为此，本文基于里兹法和二维抽样优化算法[9]优化了复合材料超椭圆板和穿孔矩形板的铺层序以使其振动基频最大。

由于超椭圆板和穿孔板在工程中有着广泛应用，国内外研究人员开展了大量研究。邸馗等[10]利用三阶剪切变形理论研究了超椭圆蜂窝夹芯板在简支边界条件下的自由振动问题。武兰河等[11]提出了一种新型微分容积法，利用该方法分析了任意边界条件下中等厚度超椭圆板的自由振动问题。M. D. Waller[12]通过试验研究了长宽比为1.25和2的椭圆板振动问题。S. Ceribasi等[13]对超椭圆板的振动进行了参数化研究，考虑了不同长宽比、材料泊松比和厚度变化对频率参数的影响。焦显义[14]和K. M. Liew等[15]建立了包含剪切变形和转动惯量的能量公式，利用Ritz法分析了自由、简支、固支边界条件下超椭圆板的自由振动问题。K. D. Mali等[16]用Ritz法确定了四边固支含方形孔矩形板的自由振动基频，并用有限元验证了模态精确性。K. Ghonasgi等[17]对多孔矩形板的自由振动问题进行了参数化研究，分析了孔的大小对板前三阶固有模态的影响。M. S. H. AL-Araji等[18]研究了简支和固支边界条件下复合材料穿孔矩形板的振动模态特性，分析了孔数、孔面积、铺层铺向角和边界条件对振动频率及振型的影响。S. S. Hota等[19]提出了基于一阶剪切变形理论的亚参三角形弯曲单元，并利用该单元分析了含任意形状孔矩形板的振动特性。里兹法基于全域试函数对结构变形作近似，其普适性较有限元低，但对几何构型规则的结构求解具有收敛快、速度快、精度高、刚阵维数小等优点，因此被广泛应用于穿孔板的振动分析[20-22]，且有利于复合材料层合板的铺层优化。另外，复合材料层合板具有可剪裁、设计自由度大及离散特征，同时还需考虑复杂工程约束，其优化设计问题受到广泛关注。

Y. Narita[23]提出了基于层合板弯曲刚度敏度的分层优化算法（LOA），将复合材料铺层高维排列组合优化问题近似转化为一维线性搜索问题，通过铺层序寻优优化了复合材料矩形板的基频。R. T. Haftka等[24]将受双轴压缩载荷的

收稿日期：2023-05-16；退修日期：2023-07-20；录用日期：2023-08-16
基金项目：航空科学基金(2020Z008053001)；国家自然科学基金(12102352)；中央高校基本科研业务费专项基金(G2023KY0605)
引用格式：Duan Lei, Jing Zhao. Vibration optimization design of composite super-elliptical plates and perforated plates based on 2D sampling optimization[J].Aeronautical Science & Technology, 2023, 34(10): 42-57. 段雷，景钊. 基于二维抽样优化的复合材料超椭圆板与穿孔板振动优化设计[J]. 航空科学技术, 2023, 34(10): 42-57.

层合板铺层序优化问题转化为整数线性规划(ILP)问题，但该策略普适性较低。Jing Zhao[25-26]基于层压参数凸性、层合板弯曲刚度敏度提出了序列置换搜索(SPS)算法，但其鲁棒性较差。A. Muc 等[27]提出了一种将连续变量限制在[0, 1]范围内的进化算法，这种策略难以处理可行域中非可行点。O. Erdal 等[28]用模拟退火算法寻找使层合板屈曲承载力最大的铺层序，但此算法对全局优化问题的鲁棒性较差。Chang Nan 等[29]采用改进的粒子群算法优化了层合板在压减联载作用下的屈曲载荷，然而粒子群优化对于复合材料层合板工程约束的处理较为繁琐。M. Abachizadeh 等[30]基于蚁群算法搜索了使对称层合板基频最大的铺层序。遗传算法(GA)是复合材料结构优化中最常用的优化算法，常用于复合材料圆柱壳[31]、格栅板[32]、翼盒[33]等的铺层序优化。针对复合材料层合板铺层优化问题，这类启发式算法鲁棒性好，但优化设计准则并未考虑层合板弯曲刚度中角铺层位置关于厚度的三次敏度关系，导致计算量过大，特别是当层合板层数多且候选离散铺向角也较多时。此外，拓扑优化[34]和代理模型[35]也广泛用于复合材料层合板的振动基频优化，但拓扑优化的计算成本较高且迭代收敛慢，而代理模型则难以权衡高保真度和计算成本之间的平衡。

本文使用的二维抽样优化算法(2DSO)[9]，利用了层压参数可对铺层序变量进行降维且可表征铺层序间距离的特征，通过动态距离约束在层压参数空间中进行抽样迭代优化，一方面解决了将角铺层作为变量寻优时设计空间过大的问题；另一方面，在抽样优化结果基础上，通过分层优化算法(LOA)[23]进行铺层序优化规避了采用层压参数作为自变量时的复杂可行域约束。为最大化层合板的基频，本文基于里兹法和2DSO优化了具有不同边界条件和不同长宽比的对称复合材料超椭圆板和穿孔矩形板的铺层序，其中超椭圆板考虑了椭圆度的变化，穿孔矩形板考虑了不同的内孔边界条件。

1 理论推导

1.1 本构关系

根据经典层合板理论，层合板的位移场为

$$\begin{cases} u = u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ v = v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ w = w_0(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

式中，u、v和w为板在x、y和z方向的位移分量，如图1所示；u_0、v_0、w_0为板中性面的位移分量。

对于薄板的横向振动，$u_0=0$，$v_0=0$，则式(1)可简化为

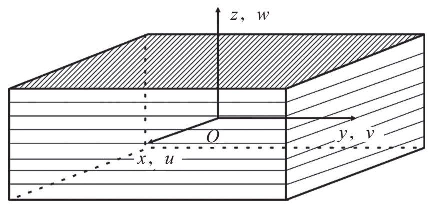

图1　复合材料层合板模型

Fig.1　Model of composite plates

$$\begin{cases} u = -z\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ w = w_0(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

应变可表达为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中，ε_x是复合材料层合板任意一点沿x方向的应变；ε_y是复合材料层合板任意一点沿y方向的应变；γ_{xy}是复合材料层合板任意一点在x–y平面的切应变。

根据广义胡克定律

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_l \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中，σ_x是复合材料层合板第l层中任意一点沿x方向的正应力；σ_y是复合材料层合板第l层中任意一点沿y方向的正应力；τ_{xy}是复合材料层合板第l层中任意一点在x–y平面的切应力，$(\bar{Q}_{ij})_l(i,j=1,2,6)$表示复合材料层合板在第$l$层的转移折减刚度系数。$(\bar{Q}_{ij})_l$可表达如下

$$\begin{cases} (\bar{Q}_{11})_l = Q_{11}\cos^4\alpha_l + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\alpha_l \\ \qquad \cos^2\alpha_l + Q_{22}\sin^4\alpha_l \\ (\bar{Q}_{12})_l = (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\alpha_l\cos^2\alpha_l + \\ \qquad Q_{12}(\sin^4\alpha_l + \cos^4\alpha_l) \\ (\bar{Q}_{22})_l = Q_{11}\sin^4\alpha_l + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\alpha_l \\ \qquad \cos^2\alpha_l + Q_{22}\cos^4\alpha_l \\ (\bar{Q}_{16})_l = (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin\alpha_l\cos^3\alpha_l + \\ \qquad (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\alpha_l\cos\alpha_l \\ (\bar{Q}_{26})_l = (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin^3\alpha_l\cos\alpha_l + \\ \qquad (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\alpha_l\cos^3\alpha_l \\ (\bar{Q}_{66})_l = (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\alpha_l \\ \qquad \cos^2\alpha_l + Q_{66}(\sin^4\alpha_l + \cos^4\alpha_l) \end{cases} \tag{5}$$

式中，α_l为复合材料层合板在第l层的铺向角，如图2所示；Q_{11}、Q_{12}、Q_{22}、Q_{66}分别表示复合材料层合板的刚度系数

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-v_{12}v_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{v_{12}E_2}{1-v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1-v_{12}v_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-v_{12}v_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \tag{6}$$

式中，E_1是1方向的弹性模量；E_2是2方向的弹性模量；v_{12}是1方向的正应力引起2方向的变形系数；v_{21}是2方向的正应力引起1方向的变形系数；G_{12}为1–2平面内的切变模量。

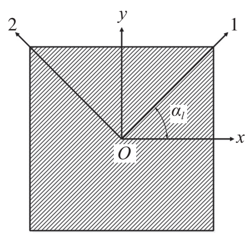

图2 层合板第l层的材料铺向角和材料主轴

Fig.2 The layup angle and principal axes of material of the layer l of the laminate

1.2 能量公式

根据经典层合板理论，复合材料层合板的应变能公式为

$$U = \frac{1}{2}\iint_A \boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}\mathrm{d}A \tag{7}$$

式中，A为复合材料层合板的实际积分域；$\boldsymbol{\kappa}$是曲率矢量，表示如下

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$D_{ij}(i,j=1,2,6)$为复合材料层合板的弯曲刚度，对于对称复合材料层合板，D_{ij}表达式如下

$$D_{ij} = \frac{2}{3}\sum_{l=1}^{N}(z_l^3 - z_{l-1}^3)(\overline{Q}_{ij})_l \tag{9}$$

式中，z_l和z_{l-1}分别为复合材料层合板中第l层的上表面和下表面坐标；N为复合材料层合板的半铺层数，如图3所示，图中t为复合材料层合板的单层厚度。

复合材料层合板的动能为

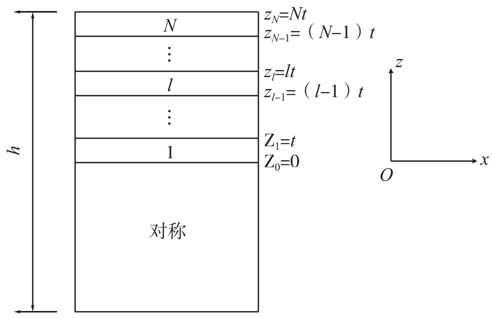

图3 复合材料层合板铺层定义

Fig.3 Stacking definition of composite laminates

$$T = \frac{h\rho}{2}\iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{t}}\right)^2 \mathrm{d}A \tag{10}$$

式中，h为复合材料层合板的厚度；ρ为复合材料层合板的密度；$\bar{t}$为时间。

1.3 里兹法求解

在正弦激励下，板的横向振动位移w可表达为时间$\bar{t}$与振幅W的函数，如下所示

$$w(x,y,\bar{t}) = W(x,y)\sin\omega\bar{t} \tag{11}$$

式中，ω为振动频率。

为便于里兹法推导求解，采用了无量纲坐标系

$$\xi = \frac{2x}{a}, \eta = \frac{2y}{b} \tag{12}$$

式中，对于复合材料超椭圆板，a和b分别为其长轴和短轴；对于复合材料穿孔矩形板，a和b分别为其长和宽。复合材料超椭圆板和穿孔矩形板的几何模型分别如图4和图5所示。

假设振幅挠度$W(\xi,\eta)$为

$$W(\xi,\eta) = \Upsilon(\xi,\eta)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\psi_i(\xi)\psi_j(\eta) \tag{13}$$

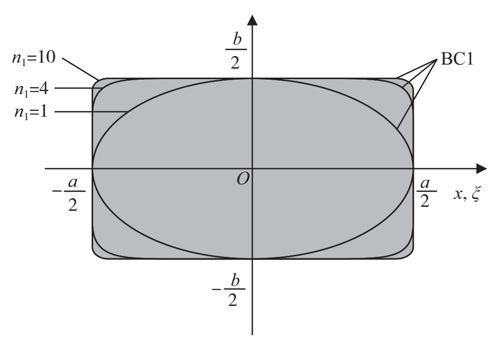

图4 不同椭圆度因子n_1的复合材料超椭圆板几何模型及边界条件

Fig. 4 Geometric model and boundary condition of the composite super-elliptical plate with different ellipticity factors n_1

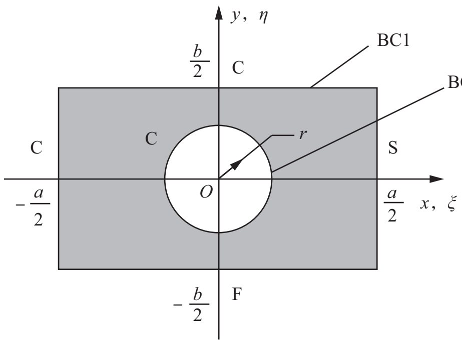

图5 穿孔对称复合材料矩形板的几何模型（边界条件 BC1 = CFSC 和 BC2 = C）

Fig.5 Geometric model of the perforated symmetrical composite rectangular plates (boundary condition BC1 = CFSC and BC2 = C)

式中，C_{ij}为未知系数；m和n为勒让德多项式的项数；$\psi_i(\xi)$和$\psi_j(\eta)$是勒让德多项式[36]，其递推公式如下

$$\psi_1(\xi)=1$$
$$\psi_2(\xi)=\xi$$
$$\psi_i(\xi)=[(2i-3)\xi\psi_{i-1}(\xi)-(i-2)\psi_{i-2}(\xi)]/(i-1), i=3,4,5,\cdots \tag{14}$$

$\Upsilon(\xi,\eta)$为复合材料层合板满足所有边界条件的函数，对于复合材料超椭圆板，其表达式为

$$\Upsilon(\xi,\eta)=(\xi^{2n_1}+\eta^{2n_1}-1)^{\chi_1} \tag{15}$$

式中，n_1为表征复合材料超椭圆板椭圆度的因子，如图4所示。对于对称复合材料穿孔矩形板，其表达式如下

$$\Upsilon(\xi,\eta)=\Upsilon_1(\xi,\eta)\Upsilon_2(\xi,\eta)=(\xi+1)^{\chi_2}(\eta+1)^{\chi_3}(\xi-1)^{\chi_4}(\eta-1)^{\chi_5}\left[\left(\frac{a\xi}{2r}\right)^2+\left(\frac{b\eta}{2r}\right)^2-1\right]^{\chi_6} \tag{16}$$

式中，r为圆孔的半径，$\chi_i(i=1,2,\cdots,6)$取值为0、1和2时，分别表征自由边界条件（F）、简支边界条件（S）和固支边界条件（C）。

复合材料超椭圆板只有外边界条件，用BC1表示，如图4所示。在图5中，复合材料穿孔矩形板包含外边界条件（BC1）和内边界条件（BC2）。其中，BC1 = CFSC，表示带孔矩形板四条外轮廓的边界条件，从最左侧边开始沿逆时针方向旋转，依次为固支（C）、自由（F）、简支（S）和固支（C）；BC2 = C，表示内部圆孔的边界条件是固支（C）。

$r_1(\xi,\eta)$表示含一个中心圆孔的复合材料矩形板的外轮廓边界条件（BC1）方程

$$r_1(\xi,\eta)=(\xi+1)^{\chi_2}(\eta+1)^{\chi_3}(\xi-1)^{\chi_4}(\eta-1)^{\chi_5} \tag{17}$$

$r_2(\xi,\eta)$表示对称复合材料穿孔矩形板的内孔边界条件（BC2）方程

$$r_2(\xi,\eta)=\left[\left(\frac{a\xi}{2r}\right)^2+\left(\frac{b\eta}{2r}\right)^2-1\right]^{\chi_6} \tag{18}$$

复合材料层合板的总能量为

$$\Pi=U-T \tag{19}$$

根据里兹方法，将式（7）和式（10）代入式（19），并求泛函的驻值

$$\frac{\partial}{\partial C_{ij}}(U-T)=0,\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \tag{20}$$

可得未知频率参数ω的特征值方程

$$\{\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\}\{\boldsymbol{C}\}=0 \tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{C}$为由未知系数$\{C_{ij}\}$构成的特征矢量矩阵；矩阵$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{M}$中的元素可由下式求得

$$K_{rs}=\frac{4b}{a^3}D_{11}I_{rs}^{2020}+\frac{4}{ab}D_{12}(I_{rs}^{2002}+I_{rs}^{0220})+\frac{4a}{b^3}D_{22}I_{rs}^{0202}+\frac{8}{a^2}D_{16}(I_{rs}^{2011}+I_{rs}^{1120})+\frac{8}{b^2}D_{26}(I_{rs}^{0211}+I_{rs}^{1102})+\frac{4}{ab}D_{66}I_{rs}^{1111} \tag{22}$$

$$M_{rs}=\frac{abh}{4}I_{rs}^{0000} \tag{23}$$

其中

$$I_{rs}^{defg}=\iint_A\frac{\partial^{d+e}W_r}{\partial\xi^d\partial\eta^e}\frac{\partial^{f+g}W_s}{\partial\xi^f\partial\eta^g}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{24}$$

式中，W_r或W_s表示为

$$\begin{aligned}&W_{\bar{i}}=\Upsilon(\xi,\eta)\psi_i(\xi)\psi_j(\eta)\\&r=(i-1)\times n+j\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{25}$$

式中，$\bar{i}$为r或s。此外，定义一个参考抗弯刚度$D_0=E_1h^3/[12(1-\nu_{12}\nu_{21})]$。

2 二维抽样优化算法（2DSO）

二维抽样优化算法是基于复合材料力学机理的优化算法，其优化设计准则充分考虑了复合材料层合板层压参数凸性、弯曲刚度敏度及其线性叠加特性：利用两个控制弯曲刚度的层压参数表示不同铺层序间距离，在此基础上结合层压参数空间抽样和铺层序设计优势，规避了以层压参数作为设计变量时需加载层压参数可行域约束并难以精确反演对应铺层序的问题，同时也避免了以铺层序作为设计变量导致设计空间大寻优困难的问题。此外，通过采用层压参数表征铺层序间距离，引入了层压参数空间中的动态距离约束，使得抽样优化在层压参数空间中可高效捕获铺层序解空间的重要区域。最后，基于抽样优化解，通过分层优化算法对铺层序进行优化可高效搜索铺层优化解。

2.1 优化问题

以复合材料层合板的振动基频$f=F(\boldsymbol{\Phi})$最大化为目标，对给定边界条件的对称复合材料超椭圆板和穿孔矩形板的铺层序$\boldsymbol{\Phi}$进行优化，优化问题模型如下

$$\begin{aligned}&\text{Max}: f=F(\boldsymbol{\Phi})\\&\text{s.t.}: \Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots,\theta_{M-1},\theta_M\},\\&\qquad \Delta\theta=15^{\circ}\text{ or }\Delta\theta=5^{\circ}\\&\qquad \boldsymbol{\Phi}=[\alpha_N,\alpha_{N-1},\cdots,\alpha_l,\cdots,\alpha\cdots,\alpha_1],\alpha_l\in\Theta\end{aligned}\tag{26}$$

式中，α_l为复合材料板中第l层的铺向角；N为半铺层数，如图3所示；矢量$\boldsymbol{\Phi}$为对称复合材料层合板一半的铺层序，F为复合材料板自由振动分析的里兹法求解程序，Θ为候选铺向角集合，M为候选铺向角个数，$\Delta\theta$是候选铺向角的固定间隔，如$\Delta\theta=30°$，则$\Theta=\{0°,-30°,30°,-60°,60°,90°\}$，$M=6$。

二维抽样优化算法中，首先定义了三个设计域：二维层压参数ξ_1^{D}和ξ_2^{D}［见式(27)］的连续变量设计域C（不一定对应真实铺层序），$(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})\in$ C；离散铺层序设计域Ω，$\boldsymbol{\Phi}\in\Omega$；离散铺层序对应的层压参数连续变量设计域D，D ⊆ C。

设计域C、设计域D和设计域Ω之间的关系如图6所示。下面对二维抽样优化算法的计算步骤作详细介绍。

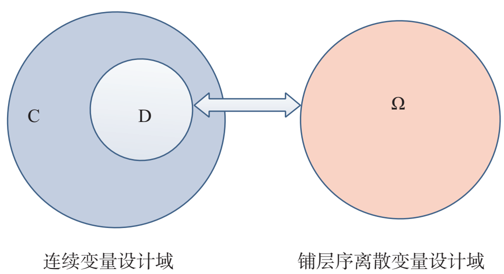

图6 设计域C、D和Ω之间的包含与映射关系

Fig.6 The contain and mapping relationship between design domains C, D, and Ω

2.2 二维抽样优化算法

(1) 给定优化所需参数

表1给出数据是本文所有优化算例用到的参数值。上述参数在2DSO中可自行定义。

(2) 在设计域C中生成均匀分布的点

在确定固定铺向角间隔$\Delta\theta$后，可得候选铺向角集合Θ，候选铺向角的数量为$M=[180/\Delta\theta]$（[ ]为高斯取整函数），故可以得到$[M/2]+1$个由相同正候选铺向角组成的铺层序$\boldsymbol{\Phi}_i=[\theta_i,\theta_i,\cdots,\theta_i,\theta_i]$，$\theta_i>0$，$\theta_i\in\Theta$。这$[M/2]+1$个$\boldsymbol{\Phi}_i$对应的两个层压参数定义为

表1 2DSO的优化参数

Table 1 Optimization parameters of 2DSO

参数名称	所属设计域	参数符号	参数值
动态距离	C	d_c	0.96
动态距离增量	C	Δd	0.04
初始点个数	C	Num	120
局部抽样距离	D	Δu	0.01
最佳点个数	D	P	5
每个最佳点附近抽样点个数	D	Q	8

$$\begin{aligned}&(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_i=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(\cos2\theta_i,\cos4\theta_i)\bar{z}^2\mathrm{d}\bar{z},\\&\qquad i=1,2,\cdots,[M/2]+1,\bar{z}=\frac{2z}{h}\end{aligned}\tag{27}$$

式中，$\bar{z}$是归一化厚度。通过式(27)可得设计域C的$[M/2]+1$个顶点$s_i=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_i$，将这些顶点依次连接可得设计域C，同时将这些顶点$s_i$记入一个顶点集合$S_{\mathrm{ver}}=\{s_1,s_2,\cdots,s_{[M/2]+1}\}$，该集合是初始样本点集合$S_{\mathrm{ini}}$的子集$S_{\mathrm{ver}}\subseteq S_{\mathrm{ini}}$。

设计域C中任意两点之间的距离公式如下

$$d_{i,j}=\left\|s_i-s_j\right\|=\sqrt{[(\xi_1^{\mathrm{D}})_i-(\xi_1^{\mathrm{D}})_j]^2+[(\xi_2^{\mathrm{D}})_i-(\xi_2^{\mathrm{D}})_j]^2}\tag{28}$$

为了使点在设计域C中均匀分布，需要引入动态距离约束，用d_c表征该距离约束的参数。若随机生成的新点$s_{\mathrm{new}}=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_{\mathrm{new}}$（此时的层压参数并不对应真实铺层序）满足以下两个条件。

动态距离约束

$$\{d_{\mathrm{new},i}>d_c|\forall s_i\in S_{\mathrm{ini}}\}\tag{29}$$

边界约束

$$\begin{aligned}&\{[(\xi_2^{\mathrm{D}})_{\mathrm{new}}-(\xi_2^{\mathrm{D}})_j][(\xi_1^{\mathrm{D}})_{j+1}-(\xi_1^{\mathrm{D}})_j]-\\&[(\xi_1^{\mathrm{D}})_{\mathrm{new}}-(\xi_1^{\mathrm{D}})_j][(\xi_2^{\mathrm{D}})_{j+1}-(\xi_2^{\mathrm{D}})_j]\leqslant 0\\&|s_j=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_j\in S_{\mathrm{ver}},s_{j+1}=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_{j+1}\in S_{\mathrm{ver}}\}\end{aligned}\tag{30}$$

式中，$j\leqslant[M/2]$时，s_j和s_{j+1}为相邻顶点；$j=[M/2]+1$时，s_{j+1}表示s_1。那么新点$s_{\mathrm{new}}=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_{\mathrm{new}}$可加入样本点集合$S_{\mathrm{ini}}$中，即

$$S_{\mathrm{ini}}=S_{\mathrm{ini}}\cup\{s_{\mathrm{new}}\}\tag{31}$$

随着集合S_{ini}中点数量的增加，点的密度不断增大，为了使点在设计域C中尽可能均匀分布，动态距离d_c需逐步减小。

$$(d_c)_{i+1}=(d_c)_i-\Delta d\tag{32}$$

式中，Δd是一个恒定增量。随着新点s_{new}不断加入集合S_{ini}中，S_{ini}中点的密度越来越大，且动态距离d_c越来越小，使得式(29)和式(30)难以同时满足。为此，需采用GA寻找同时满足约束式(29)和式(30)的新点$s_{\mathrm{new}}=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_{\mathrm{new}}$，并添加到集合$S_{\mathrm{ini}}$中。

初始化： $\mathrm{Num}=120, d_c=0.96, \Delta d=0.04, S_{\mathrm{ini}}$

迭代：

$$\begin{cases}(1)\text{ 采用 GA 搜索新点 } s_{\mathrm{new}} \\ \begin{cases}\mathrm{Max}: d^*_{\mathrm{new}}=\max\limits_{s_{\mathrm{new}}\in C}\min\ \{d_{\mathrm{new},i}=\left\|s_{\mathrm{new}}-s_i\right\|, s_i\in S_{\mathrm{ini}}\} \\ \mathrm{s.t.}:\begin{cases}\{d^*_{\mathrm{new}}>d_c|\forall s_i\in S_{\mathrm{ini}}\} \\ \{[(\xi_2^{\mathrm{D}})_{\mathrm{new}}-(\xi_2^{\mathrm{D}})_j][(\xi_1^{\mathrm{D}})_{j+1}-(\xi_1^{\mathrm{D}})_j]-[(\xi_1^{\mathrm{D}})_{\mathrm{new}}- \\ (\xi_1^{\mathrm{D}})_j][(\xi_2^{\mathrm{D}})_{j+1}-(\xi_2^{\mathrm{D}})_j]\leqslant 0|(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_j\in S_{\mathrm{ver}}\}\end{cases}\end{cases} \\ (2)\text{ 评估并更新集合 } S_{\mathrm{ini}} \text{ 或动态距离 } d_c \\ \begin{cases}\text{找到新点} s_{\mathrm{new}}: S_{\mathrm{ini}}=S_{\mathrm{ini}}\cup\{s_{\mathrm{new}}\}, |S_{\mathrm{ini}}|=|S_{\mathrm{ini}}|+1 \\ \text{未找到新点}: (d_c)_{i+1}=(d_c)_i-\Delta d\end{cases} \\ (3)\text{ 停止。若 } |S_{\mathrm{ini}}|>\mathrm{Num}, \text{输出 } S_{\mathrm{ini}};\text{ 否则: 转步骤(1)}\end{cases} \tag{33}$$

式中，d^*_{new}表示使得点s_{new}到集合S_{ini}中点s_i的最小距离最大化后的值，以该距离作为搜索目标可使加入集合S_{ini}中点的分布尽量均匀。当集合S_{ini}中初始点个数超过Num，则步骤(2)结束，转步骤(3)。

(3) 在设计域D中生成均匀分布的点

基于候选铺向角集合Θ在域Ω中生成的铺层序$\boldsymbol{\Phi}_i\in\Omega$，并可根据式(27)计算其层压参数$(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_i$，将层压参数记入对应集合D中：$\{u_i|\ u_i=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_i, u_i\in \mathrm{D}\}$。

为保证设计域D中生成的点u_i尽可能接近设计域C中生成的点，采用遗传算法搜索铺层序$\boldsymbol{\Phi}_i$。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}: d^*_{i,i}=\min_{\boldsymbol{\Phi}_i}\ \{d_{i,i}=\|u_i-s_i\|, \\ &u_i\in \mathrm{D}, s_i\in S_{\mathrm{ini}}\}, i=1,2,3,\cdots,\mathrm{Num}\end{aligned} \tag{34}$$

因此，对于设计域C中的每一个点s_i，总有一个在设计域D中的点u_i与之对应，u_i对应的铺层序为$\boldsymbol{\Phi}_i$。将设计域D中所有点u_i记入集合U_{ini}，同时将集合U_{ini}中所有点对应的铺层序$\boldsymbol{\Phi}_i$记入集合Ω_{ini}。

$$\begin{aligned}&U_{\mathrm{ini}}=\{u_i|u_i=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_i=\mathrm{LPs}(\boldsymbol{\Phi}_i),\boldsymbol{\Phi}_i\in\Omega, \\ &i=1,2,3,\cdots,\mathrm{Num}\} \\ &\Omega_{\mathrm{ini}}=\{\boldsymbol{\Phi}_i|u_i=(\xi_1^{D},\xi_2^{D})_i=\mathrm{LPs}(\boldsymbol{\Phi}_i),u_i\in U_{\mathrm{ini}},\boldsymbol{\Phi}_i\in\Omega \\ &i=1,2,3,\cdots,\mathrm{Num}\}\end{aligned} \tag{35}$$

式中，LPs表示对铺层序的层压参数计算符号。

(4) 抽样优化

根据里兹法求解程序F求解集合Ω_{ini}中铺层序$\boldsymbol{\Phi}_i$对应的振动基频v_i，并保存到集合V中。

$$V=\{v_i|v_i=F(\boldsymbol{\Phi}_i),\boldsymbol{\Phi}_i\in\Omega_{\mathrm{ini}}\} \tag{36}$$

从中筛选出最大基频

$$v_{\max}=\max\ \{V\} \tag{37}$$

将集合V中的值从大到小排列，然后从大到小选择P个最佳点，将它们记入集合W中。

$$W=\{w_i|w_i\in V, w_1\geqslant w_2\geqslant w_3\cdots\geqslant w_P, i=1,2,3,\cdots,P\} \tag{38}$$

将P个最佳点对应的铺层序$\boldsymbol{\Phi}_i$及其层压参数u_i记入集合T_0中。

$$\begin{aligned}&T_0=\left\{\left\{\boldsymbol{\Phi}_i,u_i\right\}\middle|u_i=(\xi_1^{\mathrm{D}},\xi_2^{\mathrm{D}})_i=\mathrm{LPs}(\boldsymbol{\Phi}_i),u_i=U_{\mathrm{ini}}, \\ &v_i=F(\boldsymbol{\Phi}_i),\boldsymbol{\Phi}_i\in\Omega_{\mathrm{ini}}\right\}\end{aligned} \tag{39}$$

集合T_0中的每个元素$\{\boldsymbol{\Phi}_i,u_i\}$ $(i=1,2,\cdots,P)$，可在其邻域内通过遗传算法在层压参数空间中确定Q个均匀分布在u_i邻域的候选点。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}: d^*_{j,i}=\min_{\Phi_j\in\Omega}\ \{d_{j,i}=|j\Delta u/Q-\|u_j-u_i\||, \\ &\left\{\boldsymbol{\Phi}_i,u_i\right\}\in T_0,\left\{\boldsymbol{\Phi}_j,u_j\right\}\in \boldsymbol{T}^i_{\mathrm{sub}}\},\forall i=1,2,\cdots,P; \\ &j=1,2,\cdots,Q\end{aligned} \tag{40}$$

式中，$j\Delta u/Q$保证了Q个候选点均匀分布在以点u_i为圆心和Δu为半径的圆内，T^i_{sub}表示点u_i附近的Q个候选点对应的铺层序及其层压参数。

$$\begin{aligned}&T^i_{\mathrm{sub}}=\left\{\left\{\boldsymbol{\Phi}_j,u_j\right\}\middle|u_j=(\xi_1^D,\xi_2^D)_j= \right. \\ &\left.\mathrm{LPs}(\boldsymbol{\Phi}_j),\boldsymbol{\Phi}_j\in\Omega,j=1,2,\cdots,Q\right\}, i=1,2,\cdots,P\end{aligned} \tag{41}$$

从而得到一个由$P\times Q$个候选点组成的集合

$$T_{\mathrm{sub}}=T^1_{\mathrm{sub}}\cup T^2_{\mathrm{sub}}\cup T^3_{\mathrm{sub}},\cdots,\cup T^P_{\mathrm{sub}} \tag{42}$$

随后，计算集合T_{sub}中候选点的目标函数值，并将其记录在子集V_{sub}中。

$$V_{\mathrm{sub}}=\{v_i|v_i=F(\boldsymbol{\Phi}_i),\{\boldsymbol{\Phi}_i,u_i\}\in T_{\mathrm{sub}}\} \tag{43}$$

再将集合V和V_{sub}求并集，得到一个新的集合V。

$$V=V\cup\{V_{\mathrm{sub}}\} \tag{44}$$

最后，若满足如下收敛公式，则该步骤结束，进入下一步；否则，继续重复式(36)~式(44)，直至满足以下收敛公式。

$$|(v_{\max})_{e+1}-(v_{\max})_e|=0 \tag{45}$$

式中，e为抽样迭代优化的代数。

(5) 局部铺层优化

将上一步中获得的抽样优化解作为输入，采用分层优化算法（LOA）[23]作局部铺层优化，获得最终优化解。图7给出了2DSO算法流程图。

2.3 二维抽样优化算法实例

为更好地理解2DSO算法的寻优过程，本节给出了一个铺层数为8的对称复合材料穿孔矩形板的详细寻优过程。所使用的材料参数为：E_1=138GPa，E_2=8.96GPa，G_{12} = 7.1GPa，v_{12} = 0.28，ρ = 1656kg/m^3。复合材料含圆孔矩形板的几何参数为：a/h = 448，a/b = 2，$2r/b$ = 0.3，其中a和b分别为复合材料穿孔矩形板的长和宽，h为层合板厚度，r为中

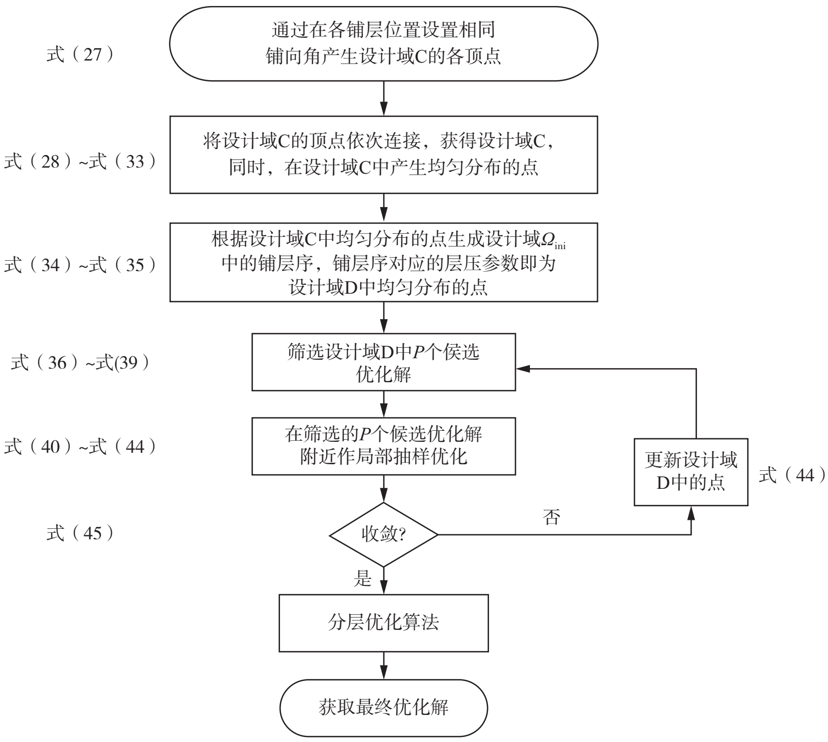

图7　二维抽样优化算法(2DSO)流程图

Fig.7　Flowchart of two-dimensional sampling optimization algorithm(2DSO)

心圆孔半径。

矩形板和圆孔的边界条件分别定义为BC1 = CCCF和BC2 = S。在以下描述中，将省略铺向角的角度符号“°”。候选铺向角角度间隔为$\Delta\theta$ = 5，候选铺向角集合定义为Θ = {0, 5, –5, 10, –10, ⋯, 85, –85, 90}。

(1) 给定优化所需参数

2DSO参数值见表1。

(2) 在设计域C中生成均匀分布的点

首先根据候选铺向角集合Θ，确定19个由相同正铺向角组成的铺层序$\boldsymbol{\Phi}_i = [\theta_i, \theta_i, \theta_i, \theta_i]$，$\theta_i$ >0，$\theta_i \in \Theta$，然后根据式(27)计算它们的层压参数来确定设计域C的19个顶点，如图8(a)所示。然后将19个顶点依次连接确定它们所围成的设计域C。最后根据式(28)~式(33)，在设计域C内生成均匀分布的点，如图8(b)的红色点所示。

(3) 在设计域D中生成均匀分布的点

对于设计域C中每一个点，基于候选铺向角集合Θ，通过式(27)、式(34)和式(35)在设计域Ω内生成一个铺层序集合，使得该铺层序集合中的每一个铺层序对应设计域D中的点(图8(c)的蓝色点)且离设计域C中的点最近。

(4) 抽样优化

根据式(36)和式(37)计算设计域D中均匀分布点的目标值，并通过式(38)筛选P个最佳点(见图8(d)中红色三角形)。然后，利用式(39)~式(42)在每个最佳点附近生成Q个候选点，之后基于里兹法即式(43)求解这$P \times Q$个候选点(见图8(e)中蓝色的点)振动基频。

最后通过式(44)和式(45)判断抽样迭代优化结果是否收敛，若不收敛，则按照上述步骤进行下一次迭代，直到得到收敛解(见图8(h)中绿色三角形)。

(5) 局部铺层优化

将第(4)步获得的收敛解作为输入，采用分层优化算法(LOA)[23]作铺层序寻优，获得最终铺层序优化解$[25/-35/90/-45]_s$(见图8(i)中粉色三角形)和对应的无量纲频率参数为$f = \omega a^2\sqrt{\rho h/D_0}$ = 38.692。

3 数值结果

以上利用里兹法求解了复合材料超椭圆板和穿孔矩形板的振动基频，并采用2DSO搜索使基频最大化的铺层序。3.1节研究了里兹法的收敛性和精确性，并与已有文献做了对比。3.2.1节给出了在自由、简支和固支三种边界条件下不同长宽比和不同椭圆度因子n_1的复合材料超椭圆板的优化铺层序及振动频率和振型。3.2.2节给出了在10种边界

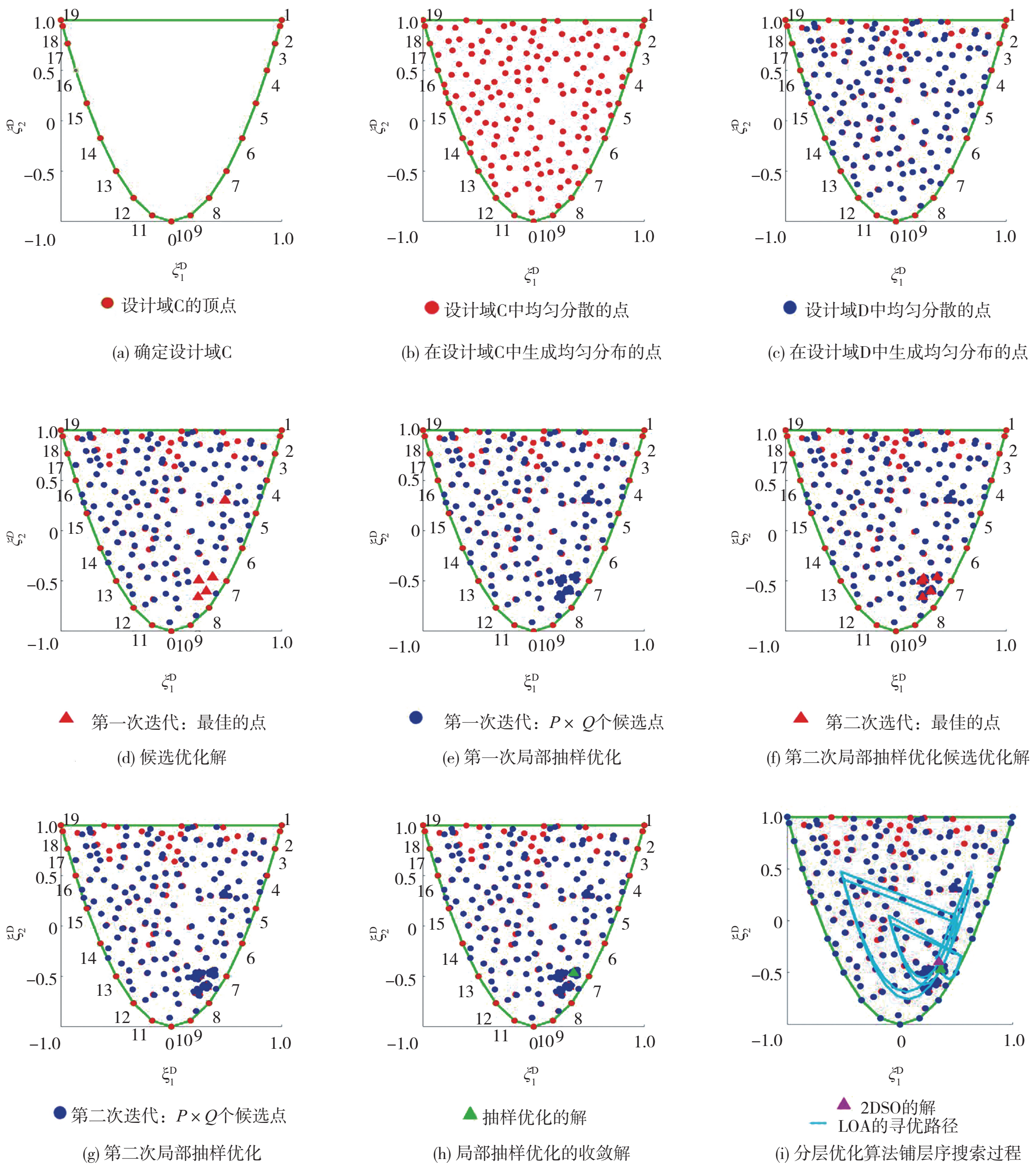

图8　2DSO算法设计步骤

Fig.8　2DSO design step

条件、两种长宽比和两种圆孔半径下对称复合材料穿孔矩形板的优化铺层序及振动频率和振型。在以下算例中使用了三种材料，三种材料的参数为：材料1：E_1 = 130GPa, E_2 = 9GPa, G_{12} = 4.8GPa, v_{12} = 0.28, ρ = 1656kg/m^3。材料2：E_1 = 138GPa, E_2=8.96GPa, G_{12}=7.1GPa, v_{12} = 0.3, ρ = 1656kg/m^3。材料3：E_1 = 206GPa , E_2 = E_1, G_{12} = $E_1/[2(1+v_{12})]$, v_{12} = 0.3, ρ = 8000kg/m^3。

3.1 里兹法收敛性研究

首先验证里兹法求解复合材料超椭圆板振动基频的收敛性和精确性。采用材料3，表2给出了里兹法求解宽厚比 a/h = 100 的复合材料超椭圆板的无量纲频率参数 $f = (\omega a^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0}$ 收敛时所需的项数，并将结果和已有文献结果进行了对比。结果显示，当位移函数的项数 $m \times n$ 从9 × 9增加到10 × 10时，无量纲自然频率参数变化远小于1%，且10 × 10项位移函数求得的无量纲自然频率参数和已知文献的无量纲自然频率参数之间的误差也远小于1%。采用材料1，表3给出了宽厚比 a/h = 448、铺层序 $[-45/45/-45/-45]_s$、孔径 $2r/b$ = 0.3的对称复合材料穿孔矩

形板无量纲频率参数$f = \omega a^2\sqrt{\rho h/D_0}$，结果显示当位移函数项数$m \times n$从$30 \times 30$增加到$35 \times 35$时，对称复合材料穿孔矩形板的无量纲自然频率参数变化远小于1%，因此可认为里兹法在形函数项数$m \times n$是30×30时结果收敛。采用材料1，表4给出了宽厚比$a/h = 256$、铺层序$[45/0/0/90/0/-45/0]_s$、内孔边界条件BC2 = F的对称复合材料穿孔矩形板频率$f = \omega/(2\pi)$ (Hz)，对比结果表明当位移函数项数为30×30时结果收敛。

表2 超椭圆板前6阶频率参数$f = (\omega a^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0}$收敛与验证

Table 2 Convergence and verification of the first six frequency parameters $f = (\omega a^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0}$ for the super-elliptical plates

BC1	n_1	a/b	$m \times n$	模态1	模态2	模态3	模态4	模态5	模态6
C	10	1	8×8	3.6586	7.4496	7.4496	10.983	13.963	14.047
			9×9	3.6503	7.4474	7.4474	10.983	13.336	13.400
			10×10	3.6503	7.4410	7.4410	10.971	13.336	13.400
			文献[37]	3.6420	7.4340	7.4350	10.962	13.305	13.364
		2	8×8	9.9950	12.935	18.588	25.969	27.228	28.850
			9×9	9.9725	12.916	18.157	25.969	27.219	28.850
			10×10	9.9725	12.911	18.157	25.693	25.944	28.822
			文献[37]	9.9510	12.897	18.132	25.743	25.926	28.805
		3	8×8	21.225	23.656	28.331	35.905	57.187	59.828
			9×9	21.177	23.610	28.061	35.869	46.945	57.187
			10×10	21.177	23.607	28.061	34.772	46.945	57.132
			文献[37]	21.132	23.581	28.027	34.851	44.045	57.096
S	10	1	8×8	1.9994	4.9909	4.9909	7.9677	10.053	10.090
			9×9	1.9951	4.9896	4.9896	7.9677	9.9720	10.005
			10×10	1.9951	4.9894	4.9894	7.9675	9.9720	10.005
			文献[37]	1.9900	4.9860	4.9860	7.9650	9.9680	10.002
		2	8×8	5.0171	7.9846	13.034	17.006	19.965	20.483
			9×9	5.0036	7.9758	12.961	17.005	19.965	20.477
			10×10	5.0036	7.9757	12.961	17.004	19.956	19.964
			文献[37]	4.9860	7.9690	12.955	16.989	19.953	20.003
		3	8×8	10.062	13.014	18.027	25.408	37.037	39.998
			9×9	10.031	12.989	17.954	25.393	35.555	37.037
			10×10	10.031	12.989	17.954	24.935	35.555	37.035
			文献[37]	9.9870	12.970	17.942	25.033	34.123	36.998

3.2 优化结果

2DSO中的初始参数值由表1定义。基于里兹法和2DSO优化了候选铺向角间隔分别为$\Delta\theta = 5$和$\Delta\theta = 15$的8层和48层对称复合材料超椭圆板，以及候选铺向角间隔分别为$\Delta\theta = 5$和$\Delta\theta = 15$的8层和40层对称复合材料穿孔矩形板，其设计空间分别为$36^4 = 1679616$、$12^{24} \approx 7.9497\times10^{25}$、$12^{20} \approx 3.8338\times10^{21}$。优化的目标函数调用次数用变量NF表

表3 对称复合材料穿孔矩形板基频参数$f = \omega a^2\sqrt{\rho h/D_0}$收敛研究

Table 3 Convergence study of the fundamental frequency parameter $f = \omega a^2\sqrt{\rho h/D_0}$ for the symmetrical composite perforated rectangular plates

a/b	BC1	BC2	形函数项数$m\times n$						
			5×5	10×10	15×15	20×20	25×25	30×30	35×35
1	CCFF	F	4.2292	4.1830	4.1732	4.1685	4.1669	4.1663	4.1661
		S	9.0624	7.7908	7.4034	7.1779	7.1252	7.1135	7.1112
		C	13.558	10.797	10.439	10.313	10.296	10.289	10.288
3	CCFF	F	19.344	19.184	19.136	19.111	19.091	19.079	19.069
		S	28.567	26.565	25.824	25.363	25.031	24.791	24.606
		C	35.117	30.232	28.710	27.809	27.390	27.083	26.940
1	SSFF	F	2.8052	2.7720	2.7608	2.7581	2.7569	2.7566	2.7564
		S	8.8451	7.7395	7.1340	6.9558	6.8796	6.8646	6.8619
		C	13.586	11.068	10.357	10.255	10.221	10.216	10.213
3	SSFF	F	8.2108	8.1971	8.1853	8.1780	8.1724	8.1694	8.1677
		S	22.585	20.434	19.493	19.003	18.664	18.421	18.227
		C	30.290	24.857	22.708	21.808	21.218	20.936	20.722

表4 对称复合材料穿孔矩形板基频参数$f= \omega/(2\pi)$对比验证

Table 4 Comparison between the fundamental frequency parameters $f= \omega/(2\pi)$ for the symmetrical composite perforated rectangular plates

b/mm	BC1	$2r$/mm		模态1	模态2	模态3	模态4	模态5	模态6
114	CSCS	35	Present	302	395	543	753	1020	1128
			文献[38]	299	393	535	739	1004	1106
		44	Present	300	394	544	750	1028	1109
			文献[38]	297	381	538	727	1015	1076
		57	Present	299	390	553	735	1053	1071
			文献[38]	298	385	549	702	1035	1042
121	CSCF	35	Present	80	195	359	411	526	574
			文献[38]	80	193	355	406	519	567
		44	Present	80	194	358	405	524	573
			文献[38]	80	192	354	401	516	563
		57	Present	81	192	357	400	519	568
			文献[38]	81	190	354	396	509	556
127	CFCF	35	Present	62	112	170	245	332	422
			文献[38]	61	111	170	242	329	417
		44	Present	61	113	170	243	331	421
			文献[38]	61	112	169	240	328	416
		57	Present	61	113	169	240	329	419
			文献[38]	61	112	168	237	327	414

示，此外，本小节所有优化结果的频率均用无量纲频率参数$f = \omega a^2\sqrt{\rho h/D_0}$表示。

3.2.1 复合材料超椭圆板振动优化设计

本节复合材料超椭圆板使用材料2且层合板宽厚比a/h=100。表5和表6分别给出了8层($\Delta\theta$=5)和48层($\Delta\theta$=15)对称椭圆层合板的优化结果;表7和表8分别给出了8层($\Delta\theta$=5)和48层($\Delta\theta$=15)对称超椭圆层合板的优化结果。当椭圆度因子n_1和边界条件不变时,复合材料超椭圆板的最大基频随长宽比a/b的增大而增大,见表5~表8。此外,在椭圆度因子n_1和长宽比a/b不变的条件下,复合材料超椭圆板的最大基频也随着边界变刚硬而增大,见表5和表7,对于铺层数为8层的复合材料超椭圆板,平均目标函数调用次数NF为395.74次,仅占总设计空间的0.0236%。而表6和表8显示,对于48层对称复合材料超椭圆板,平均目标函数调用次数NF为1009.19次。这表明2DSO算法的计算量与复合材料层合板的铺层数不呈指数关系,而是近似线性。铺层数为48层的复合材料超椭圆板目标函数调用次数NF比铺层数为8层的复合材料超椭圆板目标函数调用次数NF多的主要原因是局部优化求解器LOA[23]是逐层筛选搜索算法,随着层数的增加,目标函数调用次数NF增大;由于LOA基于层合板弯曲刚度敏度进行搜索,其目标搜索次数随着层数增大近似线性增大。图9给出了不同工况下复合材料超椭圆板的前六阶频率及其振型,不同模态图对应的工况及铺层序分别为:(a) $n_1=10$, $a/b=3$, BC1 = F, $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{opt}}=\pm[10/-15/-25/0]_{\mathrm{s}}$;(b) $n_1=4$, $a/b=1$, BC1 = S, $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{opt}}=\pm[45/-45/-45/-45]_{\mathrm{s}}$; (c) n_1=4, a/b=2, BC1 = C, $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{opt}}=[90_4]_{\mathrm{s}}$。

表5 复合材料椭圆板(8层)基频最优解

Table 5 Optimal solutions for fundamental frequency of composite elliptical plates (8 layers)

a/b	BC1	$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{opt}}$	f_{opt}	NF
1	F	$\pm[-50/90/20/15]_{\mathrm{s}}$	11.702	1444
	S	$\pm[45/-60/-15/-15]_{\mathrm{s}}$	12.864	741
	C	$\pm[45/-45/-45/-45]_{\mathrm{s}}$	26.785	218
2	F	$[15/-15/-15/70]_{\mathrm{s}}$	22.090	233
	S	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	44.486	218
	C	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	95.747	218
4	F	$[0_4]_{\mathrm{s}}$	28.056	218
	S	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	167.29	218
	C	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	369.35	218

3.2.2 对称复合材料穿孔矩形板振动优化设计

本小节算例使用材料1。表9和表10分别给出了宽厚比$a/h=448$的8层($\Delta\theta=5$)对称复合材料穿孔矩形板的优化结果;表11和表12分别给出了宽厚比$a/h=89.6$的40层($\Delta\theta=15$)对称复合材料穿孔矩形板的优化结果。其中,

表6 复合材料椭圆板(48层)基频最优解

Table 6 Optimal solutions for maximum fundamental frequency of composite elliptical plates (48 layers)

a/b	BC1	$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{opt}}$	f_{opt}	NF
1	F	$[45/-45_2/45/75/0_4/-75/75/-75/90/-75/90_2/-75/15/-45_3/45/60_2]_{\mathrm{s}}$	14.166	6799
	S	$[45/60/-45_3/15/90/0_4/90_7/45/15_2/30_3]_{\mathrm{s}}$	12.880	4447
	C	$[90_5/0_{19}]_{\mathrm{s}}$	26.789	330
2	F	$[(-15/15)_2/-15_2/15/-15/15_4/90_3/60/-75/-45_2/45_3/-45/45]_{\mathrm{s}}$	23.456	4230
	S	$[90_{24}]_{\mathrm{s}}$	44.486	334
	C	$[90_{24}]_{\mathrm{s}}$	95.747	334
4	F	$[0_{24}]_{\mathrm{s}}$	28.056	334
	S	$[90_{24}]_{\mathrm{s}}$	167.29	334
	C	$[90_{24}]_{\mathrm{s}}$	369.35	334

表7 复合材料超椭圆板(8层)基频最优解

Table 7 Optimal solutions for fundamental frequency of composite super-elliptical plates (8 layers)

n_1	a/b	BC1	$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{opt}}$	f_{opt}	NF
4	1	F	$[55/-55/5/0]_{\mathrm{s}}$	10.097	1679
		S	$\pm[45/-45/-45/-45]_{\mathrm{s}}$	13.736	463
		C	$[90/0/0/0]_{\mathrm{s}}$	23.890	189
	2	F	$[5/-40/55/50]_{\mathrm{s}}$	17.613	1104
		S	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	40.734	218
		C	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	90.562	218
	3	F	$[-10/15/20/5]_{\mathrm{s}}$	21.491	358
		S	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	90.191	218
		C	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	202.46	218
10	1	F	$[55/-55/5/-30]_{\mathrm{s}}$	9.8898	70
		S	$\pm[45/-45/-45/-45]_{\mathrm{s}}$	14.249	218
		C	$[0/90_3]_{\mathrm{s}}$	23.894	218
	2	F	$[-5/40/-50/-50]_{\mathrm{s}}$	16.826	499
		S	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	40.943	218
		C	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	90.547	218
	3	F	$\pm[10/-15/-25/0]_{\mathrm{s}}$	20.838	417
		S	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	90.551	218
		C	$[90_4]_{\mathrm{s}}$	202.42	218

表10和表12复合材料穿孔矩形板的长宽比$a/b=2$。当边界条件和长宽比不变时,复合材料穿孔矩形板的最大基频随着圆孔半径的增大而增大,见表9~表12。对于铺层数为8层的穿孔层合板,平均目标函数调用次数NF为572.32次,仅占总设计空间的0.0341%,见表9和表10。而表11和表12显示,对于铺层数为40层的复合材料穿孔矩形板,平均目标函数调用次数NF为825.13次。这进一步表明,2DSO算法中的层压参数空间抽样优化使得算法计算量与复合材料层合板的铺层数不呈指数关系。图10给出了复

表8 复合材料超椭圆板基频最优解(48层)

Table 8 Optimal solutions for fundamental frequency of composite super-elliptical plates (48 layers)

n_1	a/b	BC1	$\boldsymbol{\Phi}_{opt}$	f_{opt}	NF
4	1	F	$[45_2/-45_2/45/-45_2/0_3/90/60_2/-60_2/-75_2/45/60/45_2/-30/45_2]_s$	10.825	941
		S	$[-45/45_2/-45_5/45_{10}/-45/45_5]_s$	13.790	2320
		C	$[90_5/0_{19}]_s$	23.890	323
	2	F	$[0_5/-30/45_4/-45_5/-60/15_2/30_6]_s$	18.148	1028
		S	$[90_{24}]_s$	40.734	334
		C	$[90_{24}]_s$	90.562	334
	3	F	$[15/-15/15_2/-15_2/15/-15_2/0_{15}]_s$	21.482	317
		S	$[90_{24}]_s$	90.191	334
		C	$[90_{24}]_s$	202.46	334
10	1	F	$[45_2/-45/45/-45_3/30/-30_2/30/90_6/0_7]_s$	10.465	386
		S	$[45_2/-45/45/-45_5/45_4/-45_2/(\pm45)_3/45_2/-45]_s$	14.309	334
		C	$[90_5/0_{19}]_s$	23.894	323
	2	F	$[15_3/-15_4/-30/-45_2/45_3/-45/45/30_5/75_2/-45/-30]_s$	17.712	661
		S	$[90_{24}]_s$	40.943	334
		C	$[90_{24}]_s$	90.547	334
	3	F	$[-15_2/15_4/-15_2/15/-15/0_{10}/90/45_2/-60]_s$	20.883	467
		S	$[90_{24}]_s$	90.551	334
		C	$[90_{24}]_s$	202.42	334

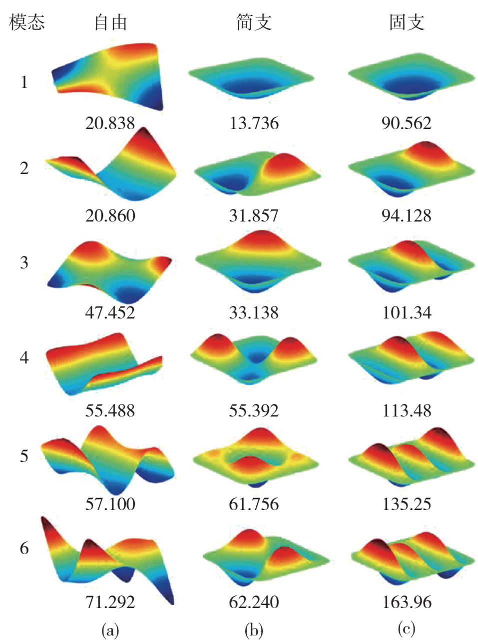

图9 铺层数为8层的复合材料超椭圆板最优解的前6阶振型

Fig.9 First six mode shapes of the 8layers optimal super-elliptical composite plates

表9 复合材料穿孔方形板(8层)基频最优解

Table 9 Optimal solutions for fundamental frequency of the composite perforated square plates (8 layers)

BC1	BC2	$2r/b=0.3$			$2r/b=0.6$		
		$\boldsymbol{\Phi}_{opt}$	f_{opt}	NF	$\boldsymbol{\Phi}_{opt}$	f_{opt}	NF
CCCC	F	$\pm[0/-80/65/65]_s$	25.669	634	$[90/0/0/0]_s$	50.866	567
CCCC	S	$[0/90/90/90]_s$	74.244	550	$[0/90/90/90]_s$	146.06	536
CFFC	F	$[-40/45/-70/-75]_s$	4.6186	787	$\pm[-30/-85/30/25]_s$	4.1960	627
CFFC	S	$[-40/45/-65/-60]_s$	8.0848	498	$[-35/-80/30/35]_s$	10.178	496
CCSS	F	$\pm[-45/45/45/45]_s$	19.244	534	$[-45/45/45/45]_s$	27.137	493
CCSS	S	$[15/85/85/85]_s$	48.789	610	$[35/80/-25/-30]_s$	97.761	712
CCCF	F	$[0/0/0/0]_s$	22.750	499	$[0/0/0/0]_s$	23.315	485
CCCF	S	$\pm[10/-15/-10/-15]_s$	24.036	489	$\pm[35/-40/-40/-35]_s$	33.018	637
CCCF	C	$\pm[45/-50/-45/-45]_s$	26.240	715	$[90/0/90/90]_s$	58.107	565
SCCF	S	$\pm[-30/45/-25/45]_s$	19.772	505	$[-35/45/-35/50]_s$	29.904	485

表10 复合材料穿孔矩形板(8层)基频最优解

Table 10 Optimal solutions for fundamental frequency of the composite perforated rectangular plate (8 layers)

BC1	BC2	$2r/b=0.3$			$2r/b=0.6$		
		$\boldsymbol{\Phi}_{opt}$	f_{opt}	NF	$\boldsymbol{\Phi}_{opt}$	f_{opt}	NF
CCCC	F	$[90/90/90/90]_s$	92.021	484	$[90/90/90/90]_s$	94.857	494
CCCC	S	$\pm[80/-40/20/15]_s$	98.134	717	$\pm[5/-20/70/15]_s$	123.10	532
CFFC	F	$[-85/-85/-85/-85]_s$	14.235	656	$\pm[90/90/-60/-10]_s$	12.960	627
CFFC	S	$[-70/-65/30/35]_s$	17.725	679	$[-70/-70/30/30]_s$	18.863	788
CCSS	F	$[90/90/90/90]_s$	61.405	493	$[85/-80/-80/65]_s$	61.309	610
CCSS	S	$[55/-50/-50/-50]_s$	76.334	522	$[45/-40/-40/-40]_s$	91.665	488
CCCF	F	$[0/0/0/0]_s$	23.247	486	$[0/0/0/0]_s$	23.944	489
CCCF	S	$\pm[-25/35/90/45]_s$	38.692	571	$\pm[-10/40/-70/-70]_s$	55.036	489
CCCF	C	$[90/0/0/0]_s$	55.343	607	$\pm[10/-50/65/70]_s$	90.970	532
SCCF	S	$[-25/50/-50/-35]_s$	34.856	676	$[-10/40/65/60]_s$	47.901	529

合材料穿孔方形板在各种边界下最优解的前4阶频率及振型：当长宽比和圆孔半径不变时，复合材料穿孔矩形板的最大频率随着边界条件变刚硬而增大。由于使用两个弯曲层压参数表征铺层序间距离，层压参数是关于铺层序铺向角的偶函数，导致多个铺层序可能同时对应一组相同层压参数。这使得2DSO算法在优化时可能找到多个具有相同目标值的优化铺层序，见表9和表10。图11给出了表9中圆孔径为$2r/b=0.3$时，2DSO算法部分优化结果的搜索收敛图。其中红线代表抽样优化搜索过程，结果表明抽样优化可获得一个非常接近最终优化解的解。但由于抽样优化具有一定随机性，可能存在比抽样

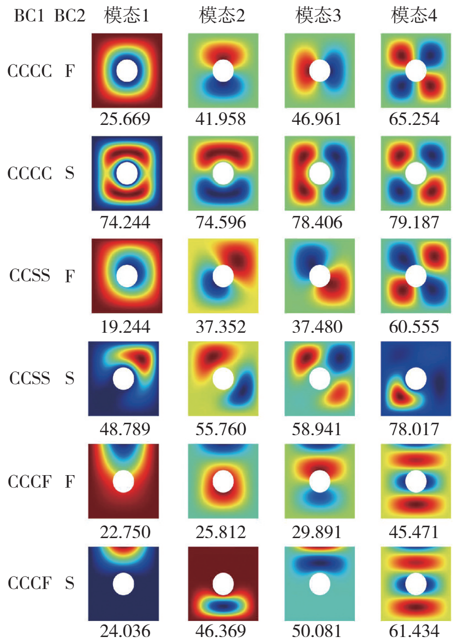

图10 表9中部分铺层数为8层的复合材料穿孔方形板最优解的前4阶振型及频率($2r/b = 0.3$)

Fig.10 First four mode shapes and frequencies of some the 8layers optimal composite perforated square plates in Table 9($2r/b = 0.3$)

优化解更好的解，因此需将抽样优化获得的解作为分层优化（LOA）的初始点进一步作铺层序寻优。绿色的线是局部铺层优化的搜索收敛图，出现振荡的原因是：LOA是一个从复合材料层合板最外层向最内层逐层搜索的算法，而每层的铺向角对振动频率的敏度作用是由弯曲刚度关于铺层位置的三次敏度关系所致，使得外层铺向角对振动频率的影响大于内层，从而导致LOA在搜索过程中出现基频大幅振荡。但LOA最后可搜索到一个收敛且比抽样优化更好的解。

4 结论

本文采用基于完备正交多项式的里兹法求解了复合材料超椭圆板和穿孔矩形板的振动频率和振型。通过与已有文献进行比较，验证了里兹法的收敛性和准确性。同时，利用2DSO优化了在不同边界条件、长宽比和椭圆度因子n_1下铺层数为8层和48层的对称复合材料超椭圆层合板的基频以及在不同边界条件、长宽比和圆孔半径下铺层数为8层和40层的对称复合材料穿孔矩形层合板的振动基频。研究表明，2DSO算法由于充分利用了层合板层压参数凸函数属性及其降维特征、弯曲刚度敏度及其线性叠加特性，使

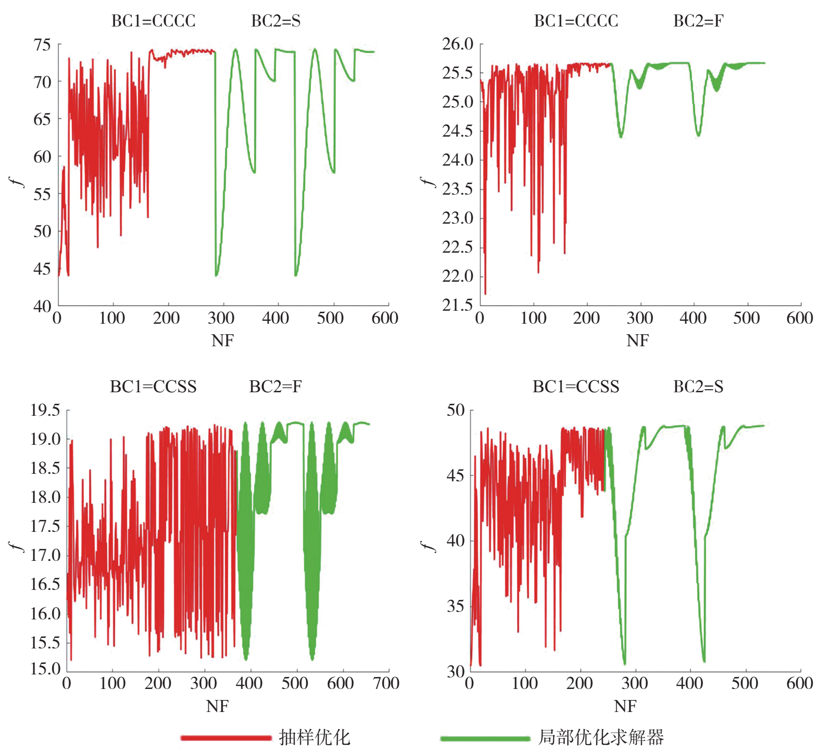

图11 表9中不同边界条件下复合材料方形板2DSO搜索收敛图($2r/b = 0.3$)

Fig.11 The convergence diagram of composite square plates 2DSO under various boundary conditions in Table 9($2r/b = 0.3$)

表11 复合材料穿孔方形板(40层)基频最优解

Table 11 Optimal solutions for fundamental frequency of the composite perforated square plates (40 layers)

r/b	BC1	BC2	Φ_{opt}	f_{opt}	NF
0.3	CCCC	F	$[0/90_2/0_2/-75/90/75/0/45/0/-15/-60/-45/45/60/-15/90/45/-15]_s$	25.677	909
	CCCC	S	$[(0/90)_4/(90/0)_2/90_3/0_4/90]_s$	75.037	986
	CFFC	F	$[-45_3/15/(-45/60)_2/-60_2/30/60/-15/45/60/-30/-15/-30/75_2]_s$	4.6230	760
	CFFC	S	$[45/-45_5/-15/-60/45/-60/-45/-30/90/45/30/60/90/60/-15_2]_s$	8.1020	785
	CCSS	F	$[-45/45/-45_2/45/-45/45_3/-45/45_6/-45/45_2/-45]_s$	19.335	876
	CCSS	S	$[75/90/0/15_3/75/60/90/15/0/90/75/0/75/0/90/0_3]_s$	49.049	1188
	CCCF	F	$[0_{20}]_s$	22.750	675
	CCCF	S	$[0_9/-15/15_2/-15/15/-15_2/15_2/-15_2]_s$	24.008	675
	CCCF	C	$[-45_2/45_3/-75/45/-30/-45/45/60/-45_2/45/-45/45/-45/45_3]_s$	26.370	865
	SCCF	S	$[45/(-30_4/45/-30/45)_2/-30_2/45/-30_2]_s$	19.768	712
0.6	CCCC	F	$[0/90_2/0_2/90_3/0_3/90/0_2/90_3/0_2/90]_s$	51.113	873
	CCCC	S	$[90_3/0_4/90/0_3/90_2/0_3/90_2/0/90]_s$	146.86	793
	CFFC	F	$[-15/-45/15/-60/-75/-45/-30/75/-30/-75_2/60_2/90/60/0/-45/45/-45/30]_s$	4.2036	721
	CFFC	S	$[-45/-30/-45/15/-60/75/45/0/-45/-60/90/60/90/-45_2/45/90_2/60/0]_s$	10.264	828
	CCSS	F	$[-45/45_4/-45_6/45/-45_2/45_6]_s$	27.224	796
	CCSS	S	$[30/45_2/0/75/45/60/0/90/75/-60/-45/60/-75/15/-45/-60/45_2/-60]_s$	97.785	754
	CCCF	F	$[0_{20}]_s$	23.315	666
	CCCF	S	$[-45/-30/45/30_2/-30/45/-45/30/-30/30/45/-30_2/-45/45_2/-45_2/45]_s$	32.928	724
	CCCF	C	$[0/90_7/0/90_2/0_3/90/0/90/0_3]_s$	58.177	791
	SCCF	S	$[45/-30_4/45/-30_2/45_2/-45_2/45/-45_2/45_2/-45/45_2]_s$	29.808	956

表12 复合材料穿孔矩形板(40层)基频最优解

Table 12 Optimal solutions for fundamental frequency of the composite perforated rectangular plate (40 layers)

r/b	BC1	BC2	Φ_{opt}	f_{opt}	NF
0.3	CCCC	F	$[90_{20}]_s$	92.031	670
	CCCC	S	$[-75/-15/-75/90/60_2/75/45/-75/-30/15_2/90/-60/15/-45/75/-60/-15/0]_s$	98.171	834
	CFFC	F	$[-75_2/90_{11}/-75/90_3/-75/90/-75]_s$	14.163	950
	CFFC	S	$[-60/-75/-60_2/-75_2/30/-75/30/-60/-75_3/30/-75_2/-60/30/-75/30]_s$	17.688	907
	CCSS	F	$[90_{20}]_s$	61.405	804
	CCSS	S	$[45/-45_2/60_2/-45/60_2/45_2/-45_4/45/-45_3/60/-45]_s$	76.058	837
	CCCF	F	$[0_{20}]_s$	23.247	677
	CCCF	S	$[45/-15/30/0/-30/-60/-30/30/-75/45/-15/-75/75/-30/-75/-60/30/45/-60_2]_s$	38.977	763
	CCCF	C	$[90/0_3/90_2/0/90_4/(0/90)_2/0_2/90/0/90]_s$	55.507	863
	SCCF	S	$[-30_4/60/-15/-30/30/-30/60/45/60/75/-75/15/60/15_2/0/-60]_s$	34.895	671
0.6	CCCC	F	$[90_{20}]_s$	94.857	804
	CCCC	S	$[0_4/-15/30/0_2/-75/60/0/-30/0_2/-60/15/-60_2/30_2]_s$	123.16	712
	CFFC	F	$[90/-75/90_8/-30/90_2/-45/-75/-60/-15/0/90_2]_s$	12.963	1037
	CFFC	S	$[-60_2/-75_3/-60/30/-75/30/-60/-75/30_2/-60/-75/30/-60/30/-60/-75]_s$	18.841	908
	CCSS	F	$[90/75/-75/90_8/-75_2/75_2/-75_2/75_3]_s$	61.315	1035
	CCSS	S	$[45_3/-45_2/45/-45_3/45/-45_2/45_2/-45_3/45_2/-45]_s$	91.551	713
	CCCF	F	$[0_{17}/-15/15/15]_s$	23.945	909
	CCCF	S	$[15/-15/75/0/15/-60/-45/-30/0/60/15/45/30/-30/-15/75/-60/15/-60_2]_s$	55.363	872
	CCCF	C	$[0/15_2/-30/15/90/-30_2/75/90/-30/30_2/0/-60/60/-75/75/90/75]_s$	91.440	708
	SCCF	S	$[-15_2/-30_2/-15/90/45/-15/30/-15/75/-15/-45/15/-15/-45/15/-75/0/-15]_s$	47.995	998

得算法搜索计算量不是随铺层数增加而呈指数式增加，而是以近似线性增大，从而大幅降低了复合材料铺层寻优计算量。同时，由于结合了层压参数和铺层序寻优的优势，解决了直接采用铺向角作为设计变量优化铺层序时计算量过大的问题，同时规避了以层压参数作为设计变量时所需可行域约束且不能精确反演对应铺层序的问题。数值算例表明，2DSO具有良好的收敛性和鲁棒性，显示出其在大规模复合材料结构铺层优化设计中的应用前景。

参考文献

[1] 付裕，刘牧东，吴堂珍，等. 直升机复合材料结构疲劳寿命评定技术的研究进展与发展趋势[J]. 航空科学技术，2021，32(1):83-88.

Fu Yu, Liu Mudong, Wu Tangzhen, et al. Research progress and development trend of fatigue life evaluation technology for helicopter composite structures[J]. Aeronautical Science & Technology, 2021, 32(1): 83-88. (in Chinese)

[2] 董立君，孙伟，张永杰，等. 基于PRSEUS结构的翼身融合布局后机身结构优化设计[J]. 航空科学技术，2023，34(3):49-57.
Dong Lijun, Sun Wei, Zhang Yongjie, et al. Optimal design of fuselage structure after wing-body fusion layout based on PRSEUS structure [J]. Aeronautical Science & Technology, 2023, 34(3): 49-57. (in Chinese)

[3] 程健男，徐福泉，张体磊. 树脂基复合材料在直升机的应用及其制造技术[J]. 航空科学技术，2021，32(1):109-114.
Cheng Jiannan, Xu Fuquan, Zhang Tilei. Application of resin matrix composite in helicopter and its manufacturing technology [J]. Aeronautical Science & Technology, 2021, 32 (1): 109-114. (in Chinese)

[4] 魏洪，张磊，张丽. 复合材料细观结构表征与力学性能[J]. 航空科学技术，2016 (6): 26-29.
Wei Hong, Zhang Lei, Zhang Li. Microstructure characterization and mechanical properties of composite materials[J]. Aeronautical Science & Technology, 2016 (6): 26-29. (in Chinese)

[5] 刘佳. 混杂复合材料层压板的机械连接性能分析[J]. 航空科学技术, 2013 (6): 19-22.
Liu Jia. Analysis of mechanical connection performance of hybrid composite laminates[J]. Aeronautical Science & Technology, 2013 (6): 19-22. (in Chinese)

[6] 肖文科. 正弦振动与随机振动对飞机结构的影响关系研究[D]. 沈阳：沈阳航空工业学院, 2008.
Xiao Wenke. Study on the relationship between sinusoidal vibration and random vibration on aircraft structure[D]. Shenyang: Shenyang Institute of Aeronautical Technology, 2008. (in Chinese)

[7] 李泉. 人致激励下大跨人行桥及楼盖随机振动及优化控制[D]. 北京：清华大学，2010.
Li Quan. Random vibration and optimization control of long-span footbridge and floor under human-induced excitation[D]. Beijing: Tsinghua University, 2010. (in Chinese)

[8] Yu Zhixiang, Hu Guanghua, Li Tongmei, et al. Analysis of vibration reduction and vibration measurement for long-span railway station floor slab[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2019, 54(2): 296-303.

[9] Jing Zhao. Lamination parameter-based two-dimension sampling optimization method for stacking sequence design of composite laminates[J]. AIAA Journal, 2022, 60(5): 3225-3250.

[10] 邸馗，茅献彪. 简支边界条件下超椭圆蜂窝夹芯板的自由振动[J]. 复合材料学报，2017，34(8): 1817-1824.
Di Kui, Mao Xianbiao. Free vibration of hyperelliptic honeycomb sandwich plates with simply supported boundary conditions[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2017, 34(8): 1817-1824. (in Chinese)

[11] 武兰河，刘进，李延强. 超椭圆中厚板的自由振动[J]. 工程力学，2002(6):120-125.
Wu Lanhe, Liu Jin, Li Yanqiang. Free vibration of superelliptic plate[J]. Engineering Mechanics, 2002(6):120-125. (in Chinese)

[12] Waller M D. Vibrations of free elliptical plates[J]. Proceedings of the Physical Society (London) Series B, 1950, 63: 451-455.

[13] Ceribasi S, Altay G. Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(1-2): 668-680.

[14] 焦显义. 弹性连接的中厚超椭圆双板系统的自由振动分析[D]. 石家庄：石家庄铁道大学，2016.
Jiao Xianyi. Free vibration analysis of elastic connected medium thickness super elliptic double plate system[D]. Shijiazhuang: Shijiazhuang Tiedao University, 2016. (in Chinese)

[15] Liew K M, Feng Z C. Three-dimensional free vibration analysis of perforated super elliptical plates via the p-Ritz method[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2001, 43(11): 2613-2630.

[16] Mali K D, Singru P M. An analytical model to determine fundamental frequency of free vibration of perforated plate by using greatest integer functions to express non homogeneity[J]. Advanced Materials Research, 2013, 622: 600-604.

[17] Ghonasgi K, Bakal K, Mali K D. A parametric study on free vibration of multi-perforated rectangular plates[J]. Procedia Engineering, 2016, 144: 60-67.

[18] AL-Araji M S H, Gafer A S, Saed R S. Free vibration analysis of perforated laminated composite square plates[J]. Journal of University of Babylon for Engineering Sciences, 2018, 26(10): 335-345.

[19] Hota S S, Padhi P. Vibration of plates with arbitrary shapes of

cutouts[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 302(4-5): 1030-1036.

[20] Liew K M, Kitipornchai S, Leung A Y T, et al. Analysis of the free vibration of rectangular plates with central cut-outs using the discrete Ritz method[J].International Journal of Mechanical Sciences, 2003, 45(5): 941-959.

[21] Saeedi K, Leo A, Bhat R B, et al. Vibration of circular plate with multiple eccentric circular perforations by the Rayleigh-Ritz method[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2012, 26: 1439-1448.

[22] Zhou Ding. Three-dimensional vibration analysis of structural elements using Chebyshev-Ritz method[J]. HKU Theses Online (HKUTO), 2003, 40(12): 3089-3105.

[23] Narita Y. Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 263(5): 1005-1016.

[24] Haftka R T, Walsh J L. Stacking-sequence optimization for buckling of laminated plates by integer programming[J]. AIAA Journal, 1992, 30(3): 814-819.

[25] Jing Zhao, Sun Qin, Zhang Yongjie, et al. Stacking sequence optimization of composite cylindrical panels by sequential permutation search and Rayleigh-Ritz method[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2021, 88: 104262.

[26] Jing Zhao. Optimal design of laminated composite cylindrical shells for maximum fundamental frequency using sequential permutation search with mode identification[J]. Composite Structures, 2022, 279: 114736.

[27] Muc A, Muc-Wierzgoń M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells[J]. Composite Structures, 2012, 94(4): 1461-1470.

[28] Erdal O, Sonmez F O. Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing [J]. Composite Structures, 2005, 71(1): 45-52.

[29] Chang Nan, Wang Wei, Yang Wei, et al. Ply stacking sequence optimization of composite laminate by permutation discrete particle swarm optimization[J].Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41(2): 179-187.

[30] Abachizadeh M, Tahani M. An ant colony optimization approach to multi-objective optimal design of symmetric hybrid laminates for maximum fundamental frequency and minimum cost[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009, 37: 367-376.

[31] Almeida J H S, Ribeiro M L, Tita V, et al. Stacking sequence optimization in composite tubes under internal pressure based on genetic algorithm accounting for progressive damage[J]. Composite Structures, 2017, 178: 20-26.

[32] Ehsani A, Rezaeepazhand J. Stacking sequence optimization of laminated composite grid plates for maximum buckling load using genetic algorithm[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 119: 97-106.

[33] You C, Yasaee M, Dayyani I. Structural similitude design for a scaled composite wing box based on optimised stacking sequence[J]. Composite Structures, 2019, 226: 111255.

[34] Savran M, Aydin L. Stochastic optimization of graphite-flax/epoxy hybrid laminated composite for maximum fundamental frequency and minimum cost[J]. Engineering Structures, 2018, 174: 675-687.

[35] Murugan M S, Ganguli R, Harursampath D. Surrogate based design optimisation of composite aerofoil cross-section for helicopter vibration reduction[J]. The Aeronautical Journal, 2012, 116(1181): 709-725.

[36] 余海洋,方世跃. 关于勒让德多项式递推公式的研究[J]. 四川理工学院学报:自然科学版, 2008,21(2): 27-29.
Yu Haiyang, Fang Shiyue. Study on Legendre polynomial recurrence formula[J]. Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Sicence Edition), 2008, 21(2): 27-29. (in Chinese)

[37] Wang C M, Wang L, Liew K M. Vibration and buckling of super elliptical plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 171(3): 301-314.

[38] Boay C G. Free vibration of laminated composite plates with a central circular hole[J]. Composite Structures, 1996, 35(4): 357-368.

Vibration Optimization Design of Composite Super-elliptical Plates and Perforated Plates Based on 2D Sampling Optimization

Duan Lei，Jing Zhao

Northwestern Polytechnical University，Xi'an 710072，China

Abstract: Composite super-elliptic plates and perforated plates are widely used in engineering structures. Resonance can be effectively prevented by controlling their natural vibration frequency. In this paper, the stacking sequences of composite super-elliptic plates and perforated rectangular plates are optimized using the 2D Sampling Optimization 2DSO(method) to maximize the fundamental frequency. This algorithm is composed of sampling optimization and Layerwise Optimization Approach (LOA). 2DSO takes full advantages of the dimension reduction technique of lamination parameters, flexure stiffness sensitivity, and linear superposition principle of flexure stiffness. At the sampling optimization stage, a sampling optimization solution is obtained based on a dynamic distance constraint. On the basis of this solution, LOA is applied to optimize the stacking sequence until a convergent stacking sequence is achieved. The Ritz method based on classical laminate plate theory is used to solve the vibration fundamental frequencies of composite laminates, and 2DSO is used to optimize stacking sequences of composite super-elliptical plates and perforated plates with different boundary conditions and aspect ratios. The optimization results demonstrate that 2DSO algorithm is highly efficient, reliable, and robust.

Key Words: 2DSO; stacking sequence optimization; composite super-elliptical plate; composite perforated plate; vibration; Ritz method

Received: 2023-05-16； **Revised:** 2023-07-20； **Accepted:** 2023-08-16

Foundation item: Aeronautical Science Foundation of China (2020Z008053001); National Natural Science Foundation of China (12102352); Fundamental Research Funds for the Central Universities (G2023KY0605)