高斯混合概率假设密度算法对多目标的跟踪研究*

Multi–Target Tracking by Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density

蒋宏　田雨芬／北京航空航天大学控制一体化技术国家级科技重点实验室
丁全心　梁国威／火力控制技术国防科技重点实验室

摘　要：为了规避数据关联的困难，本文深入研究了适宜多目标跟踪工程应用，线性高斯多目标模型假设下的高斯混合概率假设密度算法（GM–PHD），详细给出了后验PHD高斯元素的均值、方差和权值的解析递推式，使用了修剪和合并方法控制高斯元素数目的指数增长。最后，给出了一系列仿真实验，验证了在检测不确定和高杂波环境下，即使对目标数量未知和时变的场景，GM–PHD都能有效地完成跟踪，将其扩展应用于非线性多目标模型，同样得到了令人满意的跟踪效果。

关键词：概率假设密度；线性高斯多目标模型；高斯混合概率假设密度；解析解

Keywords：probability hypothesis density；linear gaussian multi–target model；gaussian mixture PHD；closed–form solution

0 引 言

多目标跟踪在军事和民用方面，有着十分广泛的应用，如空中预警、海洋监测、战场监视、空中交通管制等。多目标跟踪的难点主要集中在：1）目标的数目在不断变化；2）传感器得到的量测并不都是来源于目标，还包括随机杂波和蓄意干扰。在过去几十年，多目标跟踪主要使用基于数据关联的跟踪方法[1–3]，把多目标跟踪问题分解成几个子问题分别处理，然后把这些子问题合并在一起来处理多目标跟踪。

这种把多目标跟踪问题分解成若干个子问题的方法，一直以来被作为多目标跟踪的标准方法。但在工程应用上，把处理各个子问题的方法合并在一起处理复杂环境下的多目标跟踪并非易事，其中难点出现在数据关联上。当跟踪多个目标时，数据关联显得非常困难。代表性的数据关联方法有PDA[1]（概率数据关联）和JPDA[1]（联合概率数据关联）、MHT[1,2]（多假设数据关联）、轨迹分裂法[2]和基于多维分配的数据关联[3]等。然而，JPDA只能处理目标数目不发生变化的情况，并且标准JPDA的计算复杂度非常高；MHT存在组合爆炸问题；在分配的维数大于等于3时，基于多维分配的数据关联方法的计算复杂度也非常高。如果不能有效处理数据关联，多目标跟踪问题在传统方法的意义上就很难得到有效的处理[1–3]。

为此，一些学者考虑数据关联在多目标跟踪中必要性。近年来，基于有限集统计学(Finite–Set Statistics，FISST)的多目标跟踪方法[4]得到了快速发展，取得了与工程实现非常接近的可喜成果[5]。尽管基于FISST的多目标跟踪方法有着坚实的理论基础，并且这项技术10多年前就已经有比较系统的介绍，但是由于计算上太过复杂的原因，一直以来不被研究者和工程师们所重视[6]。随着概率假设密度滤波器（Probability Hypothesis Density, PHD）的出现，FISST的多目标跟踪方法的优越性逐渐显现，得到了学术界的广泛重视。以R. Mahler[4,7–9]为代表的，为数不多的学者一直在从事这方面的系统研究工作，而B.–N.Vo在基于FISST的多目标跟踪方法通往工程实现的道路上做出了突出的贡献[5]。

基于FISST的多目标跟踪方法更能反映目标跟踪的数学本质，它成功规避了数据关联所带来的困难和麻烦，其计

*火力控制技术国防科技重点实验室航空基金资助(20095151022)

算复杂度相比传统的多目标跟踪方法要小得多,代表了目标跟踪发展的方向,而国内从事这方面研究的学者非常少。因此,为了规避数据关联的困难同时也考虑工程应用,本文针对线性高斯多目标模型,给出了高斯混合概率假设密度滤波器(Gaussian Mixture PHD, GM−PHD),详述了后验强度高斯元素的均值、方差和权值的解析递推式,使用了修剪和合并方法控制高斯元素数目的指数增长,并结合仿真实验,验证了在检测不确定和高杂波环境下,即使对目标数目未知和时变的场景,GM−PHD都能有效地完成跟踪,并将其扩展应用于非线性多目标模型,同样得到了令人满意的跟踪效果。

1 多目标跟踪的随机集建模

设$x_{k,1}\cdots,x_{k,m(k)}$, $z_{k,1}\cdots,z_{k,N(k)}$,分别为k时刻的目标状态和观测,$m(k)$和$N(k)$分别为k时刻的目标数量和观测数量。多目标跟踪的随机集描述是分别将多目标状态和多目标观测作为目标集合和测量集合进行处理,即

$$X_k=\{x_{k,1},\ldots,x_{k,M(k)}\}\subset\chi,\quad Z_k=\{z_{k,1},\ldots,z_{k,N(k)}\}\subset Z \tag{1}$$

其中,χ表示状态空间,Z表示观测空间。多目标系统的不确定性通过将多目标状态X_k和多目标观测Z_k建模为随机有限集(RFS, Random Finite Set)来表征。每个$x_{k-1}\in X_{k-1}$,要么以概率$p_{S,k|k-1}(x_{k-1})$ 在k时刻继续存在,要么以概率$1-p_{S,k|k-1}(x_{k-1})$ 消失。在k时刻目标继续存在的条件下,目标状态由x_{k-1}转移到x_k的概率密度由 $f_{k|k-1}(x_k|x_{k-1})$ 描述。因此,每个$x_{k-1}\in X_{k-1}$,其下一时刻的行为将建模为RFS $S_{k|k-1}(x_{k-1})$。另外,将目标出生建模为自发生成和由现有目标繁衍两部分,即

$$X_k=\left[\bigcup_{x\in X_{k-1}}S_{k|k-1}(x)\right]\cup\left[\bigcup_{x\in X_{k-1}}B_{k|k-1}(x)\right]\cup\Gamma_k \tag{2}$$

其中,Γ_k表示自发生成的RFS, $B_{k|k-1}(x_{k-1})$表示由现存目标$x_{k-1}\in X_{k-1}$繁衍的RFS,这里假设Γ_k, $B_{k|k-1}(x_{k-1})$, $S_{k|k-1}(x_{k-1})$都是相互独立的。

每个$x_k\in X_k$,要么以概率P_D被检测到,要么以概率$1-P_D$被漏检。在目标被检测到的条件下,从x_k得到观测z_k的似然由$f_k(z_k|x_k)$描述。因此,每个$x_k\in X_k$将形成一个RFS$\Theta_k(x_k)$。另外,由于杂波的存在,传感器还会有观测RFSK_k,这样

$$Z_k=K_k\cup\left[\bigcup_{x\in X_k}\Theta_k(x)\right] \tag{3}$$

2 高斯混合概率假设密度(GM-PHD)滤波器

设$f_k(X_k|Z^k)$表示多目标后验密度,仿照单目标递归,按下式完成Bayes框架下的多目标后验密度递归:

$$f_{k+1|k}(X_{k+1}|Z^k)=\int f_{k+1|k}(X_{k+1}|X_k)f_{k|k}(X_k|Z^k)\mu(dX_k) \tag{4}$$

$$f_{k+1|k+1}(X_{k+1}|Z^{k+1})=\frac{f_{k+1}(Z_{k+1}|X_{k+1})f_{k+1|k}(X_k|Z^k)}{\int f_{k+1}(Z_{k+1}|X_{k+1})f_{k+1|k}(X_k|Z^k)\mu(dX_k)} \tag{5}$$

其中,μ为适当的参考测量,Z^k={$Z_1,\cdots,Z_k$}为k时刻累积的观测。即使对单目标跟踪,Bayes滤波器的计算量都大得惊人,多目标Bayes滤波器的运算量是无法想像的。因此,R. Mahler提出[4,7]:可以仿照$\alpha-\beta-\gamma$滤波器,在信噪比SNR和信杂比SCR(Signal Clutter Ratio)很高的条件下,多目标后验$f_{k|k}(X_k|Z^k)$可以近似地用其一阶矩$D_{k|k}$表征。这样,通过递推传播$D_{k|k}$而不是$f_{k|k}(X_k|Z^k)$,计算量将大幅减小,可以工程应用。

对一个空间χ上的RFSX,其概率分布为P,它的一阶矩或强度是一个函数$D:\chi\to[0,\infty]$,对每个区域,$S\subseteq\chi$ 有

$$\int_S D(x)dx=\int|X\cap S|P(dX) \tag{6}$$

其中,$|X|$为集合X的势。换言之,D在任何一个区域S的积分等于该区域内存在的目标数量。强度D通常称为概率假设密度(PHD, Probability Hypothesis Density)。

在线性高斯多目标模型假设下,B.−N.Vo[5]设计了GM−PHD,将高斯混合方法应用于PHD递推执行。假定:a) 单个目标的Markov转移密度为线性高斯;b) 单个目标的似然函数为线性高斯;c) 存活概率P_S是常值;d) RFS Γ_k和$B_{k|k-1}(x')$的PHD均为高斯混合。在上述假定条件下,得到GM−PHD滤波器:

a) 预测:

$$D_{k+1|k}(x)=\sum_{i=1}^{a_k}v_{k+1|k}^i\cdot N_{B_{k+1|k}^i}(x-b_{k+1|k}^i)+\sum_{i=1}^{n_{k|k}}w_{k+1|k}^i\cdot N_{P_{k+1|k}^i}(x-x_{k+1|k}^i)+\sum_{j=1}^{b_k}\sum_{i=1}^{n_{k|k}}w_{k+1|k}^{i,j}\cdot N_{P_{k+1|k}^{i,j}}(x-x_{k+1|k}^{i,j}) \tag{7}$$

其中,$v_{k+1|k}^i=\beta_k^i$, $b_{k+1|k}^i=x_b^i$, $B_{k+1|k}^i=B_k^i$, $w_{k+1|k}^i=p_S\cdot w_{k|k}^i$,

$$x_{k+1|k}^i=F_kx_{k|k}^i \tag{8}$$

$$P_{k+1|k}^i=Q_k+F_kP_{k|k}^iF_k^T,\quad w_{k+1|k}^{i,j}=\gamma_k^j\cdot w_{k|k}^i,\quad x_{k+1|k}^{i,j}=x_{k|k}^i,\quad P_{k+1|k}^{i,j}=G_k^j+P_{k|k}^i \tag{9}$$

b) 更新: 在k+1时刻,得到新观测集Z_{k+1}={$Z_1,\cdots,Z_{m_{k+1}}$}后,将有

$$D_{k+1|k+1}(x)=\sum_{i=1}^{n_{k+1|k}}w_{k+1|k+1}^i\cdot N_{P_{k+1|k+1}^i}(x-x_{k+1|k+1}^i)+\sum_{i=1}^{n_{k+1|k}}\sum_{j=1}^{m_{k+1}}w_{k+1|k+1}^{i,j}\cdot N_{P_{k+1|k+1}^{i,j}}(x-x_{k+1|k+1}^{i,j}) \tag{10}$$

其中，$w_{k+1|k+1}^{i}=(1-p_D)w_{k+1|k}^{i}$，$x_{k+1|k+1}^{i}=x^{i}$，$P_{k+1|k+1}^{i}=P_i$，

$$P_{k+1|k+1}^{i,j}=(\mathrm{I}-K_i H)P_i \tag{11}$$

$$x_{k+1|k+1}^{i,j}=x^{i}+K_i(z_j-Hx^{i}),\quad K_i=P_iH^T(HP_iH^T+R)^{-1} \tag{12}$$

$$w_{k+1|k+1}^{i,j}=\frac{w_{k+1|k}^{i}\cdot p_D\cdot N_{R+HP_iH^T}(z_j-Hx^{i})\cdot N_{C_i}(x-c_i)}{\lambda c(z_j)+p_D\sum_{e=1}^{n_{k+1|k}}w_{k+1|k}^{e}\cdot N_{R+HP_eH^T}(z_j-Hx^{e})} \tag{13}$$

$$C_i^{-1}=P_i^{-1}+H^TR^{-1}H,\quad c_i=C_i(P_i^{-1}x^{i}+H^TR^{-1}Hz_j) \tag{14}$$

这里，H,R,P_i,X^i,K_i 分别是$H_{k+1},R_{k+1},P_{k+1|k}^{i},x_{k+1|k}^{i},K_{k+1}^{i}$的简写。

c) 修剪和合并

修剪：当前时刻高斯元素为$(w_{k|k}^{i},x_{k|k}^{i},P_{k|k}^{i}),i=1,\ldots,n_{k|k}$，若$w_{k|k}^{i}$小于设定的修剪阈值$T$，则直接去掉其所对应的高斯元素。

合并：计算两高斯元素$(w_{k|k}^{i},x_{k|k}^{i},P_{k|k}^{i})$和$(w_{k|k}^{j},x_{k|k}^{j},P_{k|k}^{j})$的距离：

$$d_{i,j}=(x_{k|k}^{i}-x_{k|k}^{j})^T(P_{k|k}^{i})^{-1}(x_{k|k}^{i}-x_{k|k}^{j}) \tag{15}$$

若$d_{i,j}$小于设定的合并阈值U，则将这两个高斯元素合并为一个高斯元素$(w_{i,j},c_{i,j},C_{i,j})$，

$$w_{i,j}=w_{k|k}^{i}+w_{k|k}^{j},\qquad c_{i,j}=\frac{w_{k|k}^{i}x_{k|k}^{i}+w_{k|k}^{j}x_{k|k}^{j}}{w_{k|k}^{i}+w_{k|k}^{j}} \tag{16}$$

$$C_{i,j}=\frac{w_{k|k}^{i}P_{k|k}^{i}+w_{k|k}^{j}P_{k|k}^{j}}{w_{k|k}^{i}+w_{k|k}^{j}}+(x_{k|k}^{i}-x_{k|k}^{j})(x_{k|k}^{i}-x_{k|k}^{j})^T \tag{17}$$

3 仿真实验

为了验证GM−PHD的优越性，开展了一系列仿真实验。设每个目标的存活概率p_s=0.99，检测概率p_D=0.98，采样周期 T=1s，修剪阈值T=0.00001，合并阈值U=4。将杂波建模为Poisson RFSK_k，其强度为：$\kappa_k(z)=\lambda Vu(z)$，其中$u(z)$为监视区域的均匀密度，$V$为监视区域的面积，λ为单位面积里的平均杂波数。实验1中：每个目标的状态为$x_k=\left[p_{x,k},p_{y,k},\dot{p}_{x,k},\dot{p}_{y,k}\right]^T$，用$CV$模型建模，过程噪声标准差为5$m/s^2$；观测为带噪声的位置测量，测量误差标准差为4$m$。实验2中：每个目标的状态为$x_k=\left[p_{x,k},\dot{p}_{x,k},\ddot{p}_{x,k},p_{y,k},\dot{p}_{y,k},\ddot{p}_{y,k}\right]^T$，用CT模型建模，由于状态转移阵是角速率$\omega$的函数，需要实时估计$\omega$值，因此用文献[10]中的方法估计$\omega$值；观测为带噪声的方位角和径距测量，目标似然函数的线性高斯假定不再满足了，因此必须使用非线性滤波，在此使用EKF。

实验1：在监视区域[−400m，1200m]×[−1200m，400m]里，有未知的时变的目标在杂波密度λ=1.5×$10^{-5}m^{-2}$的环境下被观测。目标可以自发产生，也可由其他目标繁衍。用一个强度为$b_{k+1|k}(x)=0.1N(x,m_r^1,P_r)+0.1N(x,m_r^2,P_r)$的Poisson RFS Γ_k对m_r^1和m_r^2 附近自发产生建模，其中m_r^1=$[250,250,0,0]^T$、$m_r^2=[-250,-250,0,0]^T$、P_r=$diag([10,10,5,5]^T)$。由状态ζ目标繁衍的目标Poisson RFS $B_{k+1|k}(\zeta)$强度为：$b_{k+1|k}(x|\zeta)=0.05N(x,\zeta,Q_\beta)$。其中，$Q_\beta$=$diag([10,10,4,4]^T)$。图1为目标的真实运动轨迹：在$k$=0时，目标1、目标2分别在(250$m$，250$m$)，(−250$m$，−250$m$)自发产生；然后，两目标分别作匀速直线运动；目标3在k=70时由目标1繁衍，然后作匀速直线运动。图2为杂波环境下目标的有噪声的测量轨迹，图3为GM−PHD的滤波结果。从图1～图3看出：在高密度杂波下，GM−PHD能够提供精确的跟踪性能；它不仅能检测和跟踪自发产生的目标1和目标2，同时也能检测和跟踪由目标1繁衍的目标3；虽然跟踪轨迹偶尔会偏离真实轨迹，但很快会调整回来。

实验2：在监视区域[0，2π/5]rad×[0，1800]m里，在杂波密度λ=1.0×$10^{-3}(radm)^{-1}$的环境下观测目标。目标可以自发产生，用一个强度为：$b_{k+1|k}(x)=0.2N(x,m_\gamma^1,P_\gamma)+0.2N(x,m_\gamma^2,P_\gamma)$的Poisson RFS Γ_k对m_r^1和m_r^2 附近的自发产生建模，其中m_r^1=$[200,15,0,600,0,0]^T$、m_r^2=$[1200,-15,0,600,0,0]^T$、

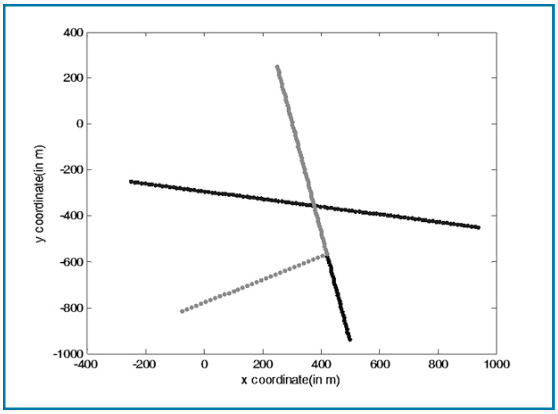

图1　目标真实运动轨迹

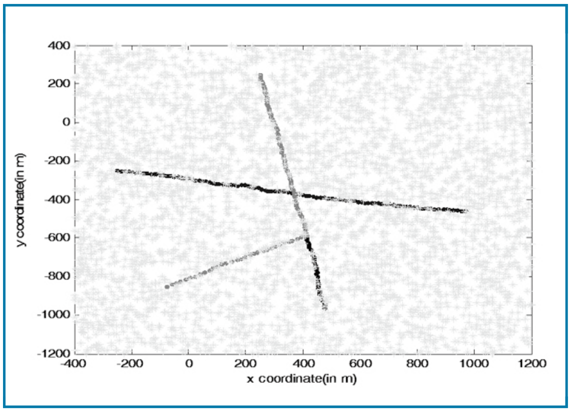

图2　杂波下目标有噪测量轨迹

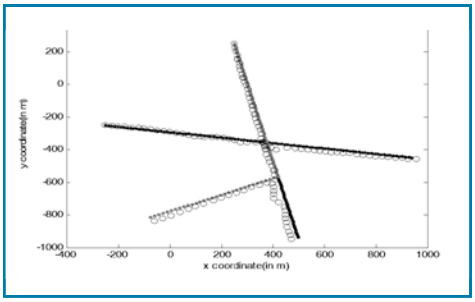

图3 GM-PHD的跟踪结果

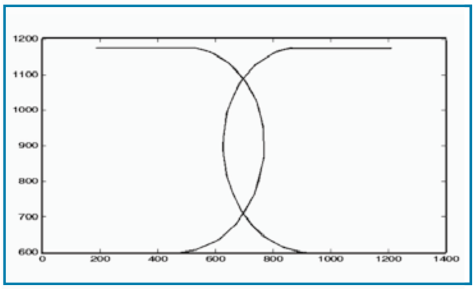

图4 目标真实运动轨迹

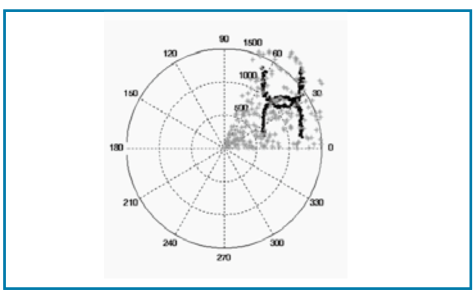

图5 杂波下目标有噪测量轨迹

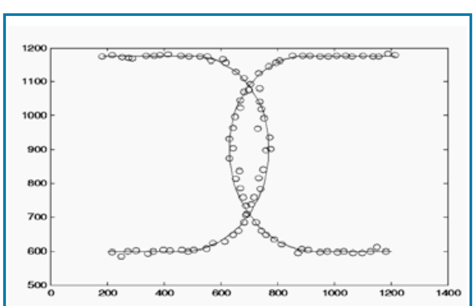

图6 GM-PHD的跟踪结果

$P_r=diag([100,100,25,25,5,5]^T)$。图4为目标的真实运动轨迹：在$k$=0时，目标1、目标2分别在(200$m$,600$m$),(1200$m$,600$m$)自发产生；在$k$=1~20时，两目标分别作匀速直线运动；在$k$=20~80时，两目标以角速度$\omega=(3\pi/180)rad/s$分别逆时针和顺时针常速转弯；在$k$=80~100时，两目标继续作匀速直线运动。图5为杂波环境下目标的有噪声的测量轨迹，图6为GM−PHD的滤波结果。从图4～图6看出，在高密度杂波下，GM−PHD能够提供较精确的跟踪性能；即使状态转移需要实时估计转弯角速率值，同时，似然函数也需要进行非线性近似，目标跟踪性能也是可以接受的；虽然跟踪轨迹偶尔会偏离真实轨迹，但很快会调整回来。

4 结论

本文首先给出了多目标跟踪的随机集建模，为了规避数据关联的困难，同时又适宜工程应用，针对线性高斯多目标模型，给出了GM−PHD；详述了后验PHD高斯元素的均值，方差和权值的解析递推式；使用了修剪和合并算法控制高斯元素数目的指数增长。最后，给出了仿真实验，验证了在检测不确定和高虚警下，即使对目标数量未知和时变的场景，GM−PHD都能有效跟踪；并将其扩展应用于非线性多目标模型，得到令人满意的结果。

AST

参考文献

[1] Blackman S S, Popoli R. Design and analysis of modern tracking system[M]. Norwood, MA: Artech House, 1999.

[2] Bar Shalom Y, Fortmann T E. Tracking and data association [M]. Academic Press, Boston, 1988.

[3] Popp R L, Pattipati K R, Bar Shalom Y. M−Best S−D assignment algorithm with application to multitarget tracking[R]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2001, 37(1): 22−27.

[4] Goodman I R, Mahler I R, Nguyen H. Mathematics of data fusion[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[5] Vo B N, Ma W K. The gaussian mixture probability hypothesis density filter[R]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2006, 54(11): 4091~4104.

[6] Vihola M. Rao−blackwellised particle filtering in random set multitarget tracking[R]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(2), 689−705.

[7] Mahler R. A theory of PHD filters of higher order in target number[C]. In Proc. SPIE Defense Security Symposium. Signal Process, Sensor Fusion Target Recognition. XV, 2006−4.

[8] Mahler R. PHD filters of higher order in target number[R].IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43 (4)：1523−1543.

[9] Mahler R. Statistics 101 for multisensor, multitarget data fusion[J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2004,19(1):53−64.

[10] Tian Ye, Jiang Hong. Adaptive variable strcture multiple model filter for high maneuvering target tracking[C]. 2010 International Conference on Computational and Information Sciences: 289−292.

作者简介：

蒋宏，副教授，主要研究方向为目标跟踪与识别、制导。