

基于蔡氏模量的复合材料刚度分析方法



贾利勇, 马苏慧

航空工业第一飞机设计研究院, 陕西 西安 710089

摘要: 复合材料各向异性及层状堆栈的特点使其分析过程中相比金属材料需要更多的工程常数输入和刚度等效计算, 给复合材料的设计分析带来了较大的难度和计算量, 蔡氏模量的引入为复合材料层压结构简化分析提供了新的思路。本文梳理了蔡氏模量、平均主刚度、厚度归一化、Trace 归一化等概念和方法, 通过对不同材料性能的分级统计, 定义了具有一定工程普适性的虚拟单向板和主毯式曲线, 验证了差异显著的碳纤维复合材料归一化刚度的相似性, 主刚度方向数据变异系数小于3%。对机翼翼盒分别采用蔡氏模量估算材料模型和真实材料模型进行有限元分析, 估算材料模型与真实材料模型所得到的机翼挠度与最大主应变偏差均小于1%, 证实了蔡氏模量作为唯一工程常数在整体复合材料结构分析中的可行性。为结构初始设计阶段快速开展方案迭代提供了新的技术途径。

关键词: 蔡氏模量; 不变量; 复合材料; 平均主刚度; 主毯式曲线; 虚拟单向板

中图分类号: TB330.1

文献标识码: A

DOI: 10.19452/j.issn1007-5453.2024.06.004

复合材料具有比强度高、比模量高、可设计性强等优点, 因此在航空航天领域得到广泛的应用。但是由于复合材料的各向异性及层状堆栈等特点, 给复合材料结构的建模分析带来了很大的困难。例如, 相对金属材料而言, 复合材料层压结构设计分析需要更多的工程常数输入、坐标变换以及刚度等效; 当结构材料、几何厚度或铺层信息发生变化时, 难以通过简单的线性运算快速完成类似金属结构的刚度换算, 中间需要额外增加大量的矩阵运算。尤其在方案设计阶段, 选材未确定或材料性能不完整的情况下, 难以开展设计分析工作, 不利于复合材料结构的高效研发。且较多的工程常数输入均依赖于大量周期长、成本高昂的物理试验^[1]。复合材料结构工程设计中, 迫切需要建立简单、高效的刚度分析方法。

2014年, Tsai等^[2-3]提出了一种新的不变量分析方法, 该方法以材料刚度矩阵 \mathbf{Q} 的迹 $\text{Tr}(\mathbf{Q})$ 作为表征材料刚度特性的唯一工程常数, $\text{Tr}(\mathbf{Q})$ 又被复合材料领域的学者联名命名为Tsai's Modulus, 即蔡氏模量。通过数据统计发现碳纤维增强复合材料单向板纵向拉伸模量 E_1 与单向板刚度矩阵迹 $\text{Tr}(\mathbf{Q})$ 的比值趋近于0.88, 且数据变异系数小于设计工程中不同批次材料模量的离散性。

基于此, Tsai等^[4-5]提出了平均主刚度(master ply)的概念, 用于确定不同材料的刚度矩阵迹。其以平均主刚度系数和唯一的试验测量值 E_1 来计算材料的刚度矩阵迹 $\text{Tr}(\mathbf{Q})$, 进而按照平均主刚度系数估算层合板的完整刚度矩阵。由于单向板中纤维主导的刚度占据了88%, 所以即使横向模量 E_2 和剪切模量 G_{12} 离散系数较高, 但复合成多角度层合板之后, 横向模量和剪切模量较高的离散度对层合板的整体刚度影响很小^[3]。基于蔡氏模量和平均主刚度的不变量法发现了不同碳纤维增强复合材料归一化之后存在的相似性, 使得复合材料设计分析不再依赖于选材。理想状态下, 针对某种材料仅需要测试其单向板纵向拉伸模量即可确定多向层合板的刚度特性。与此同时, 相同材料不同铺层比例或者相同铺层比例不同材料之间层合板的刚度可以通过简单的线性缩放进行换算, 避免了烦琐的矩阵运算^[2-3], 在保证计算精度的前提下极大地简化了复合材料层合板结构设计分析流程和方法。

自2019年以来, 基于 $\text{Tr}(\mathbf{Q})$ 的刚度分析方法受到越来越多的关注。Ha等^[6]通过理论推导揭示了 $\text{Tr}(\mathbf{Q})$ 是一种表示材料总刚度的材料属性。另外, 通过对多种材料力学性

收稿日期: 2023-11-26; 退修日期: 2024-02-05; 录用日期: 2024-04-03

基金项目: 航空科学基金(2017ZD03020)

引用格式: Jia Liyong, Ma Suhui. Stiffness analysis of composite materials based on Tsai's modulus[J]. Aeronautical Science & Technology, 2024, 35(06): 31-36. 贾利勇, 马苏慧. 基于蔡氏模量的复合材料刚度分析方法[J]. 航空科学技术, 2024, 35(06): 31-36.

能的统计分析,证实了平均主刚度概念及基于 $\text{Tr}(\mathbf{Q})$ 的刚度线性缩放方法在高模量碳纤维/环氧树脂基复合材料、标准模量碳纤维/环氧树脂复合材料以及芳纶纤维/环氧树脂复合材料中的适用性,但在玻璃纤维/环氧树脂复合材料中计算误差偏大。与上述结论不同的是,Guedes等^[7]重新评估了不变量理论在芳纶纤维及玻璃纤维增强复合材料中的适用性,发现对于单向层合板,两种材料的预测精度低于碳纤维复合材料,但对于多向层合板,不变量理论在两种材料中的预测精度得到显著改善。

此外,在复合材料设计流程方面,Melo等^[8]针对基于 $\text{Tr}(\mathbf{Q})$ 的不变量理论提出了一种新的层合板设计流程。在该流程中,首先基于平均主刚度进行结构设计、分析和优化,然后再进行选材和厚度计算,最终得到层合板的最优方案。该方法完全改变了传统复合材料结构设计方法,使得复合材料结构设计分析不再与材料本身相关。

蔡氏模量的提出减少了变量数量,极大地简化了复合材料层合板的设计、分析与优化流程,为实现更轻、更强、更好的复合材料结构设计提供了全新的理论和方法^[9]。2021年,Millen等^[10]将基于蔡氏模量的不变量理论拓展到编织复合材料和混杂复合材料设计分析中,并提出了一种采用蔡氏模量确定编织复合材料三维刚度矩阵的新方法,性能预测误差在 $\pm 10\%$ 以内;2022年,Jia Liyong等^[11]通过对数百种材料的分类统计,进一步证实了基于蔡氏模量进行简化设计分析的可行性;2023年,Erik^[12]在蔡氏模量基础上,提出了新的不变量IQ,进一步丰富了不变量理论。

基于蔡氏模量的刚度分析方法可极大地简化复合材料层合板结构设计分析过程,拓展复合材料层合板的设计空间,同时有望大幅削减积木式验证体系中底层试样级物理试验数量,缩短复合材料结构设计验证周期,降低设计成本,为层压结构设计、分析提供了全新的思路和科学理论。

目前的研究局限于少量碳纤维复合材料样本,缺少大数据样本验证。本文在梳理和定义基于蔡氏模量的不变量理论中的一些基本概念和方法的基础上,采用较大数据样本对基于蔡氏模量的简化刚度分析方法进行了验证,证实了蔡氏模量在复合材料层合板结构简化设计中的可行性。

1 刚度不变量与蔡氏模量

刚度不变量表征是层合板刚度属性及简化刚度计算的变量。对于任意二阶对称张量至少存在三个独立主不变量,以表征复合材料应力应变关系的刚度矩阵 \mathbf{Q} 为例,依据

经典层合板理论,单向板刚度矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 与偏轴刚度矩阵 $\mathbf{Q}' = [Q'_{ij}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3} (i, j = 1, 2, 6)$ 之间存在以下关系

$$\begin{cases} \mathbf{Q}' = \mathbf{J} \mathbf{Q} \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

式中, \mathbf{J} 为坐标变换矩阵, $m = \cos(\theta)$, $n = \sin(\theta)$; θ 是偏轴角度; \mathbf{Q}' 为对称矩阵。将式(1)展开可以得到

$$\begin{cases} Q'_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ Q'_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ Q'_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \\ Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3 \\ Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \end{cases} \quad (2)$$

针对上述刚度系数,组合可得式(3)所示4种新的不变量,其均与坐标系统、铺层层数、铺层角度,以及层合板的加载条件(面内或弯曲)无关^[2]

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{8}(3Q'_{11} + 3Q'_{22} + 2Q'_{12} + 4Q'_{66}) \\ U_4 = \frac{1}{8}(Q'_{11} + Q'_{22} + 6Q'_{12} - 4Q'_{66}) \\ U_5 = \frac{1}{8}(Q'_{11} + Q'_{22} - 2Q'_{12} + 4Q'_{66}) \\ U_6 = \frac{1}{8}(Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{12}) \end{cases} \quad (3)$$

自20世纪60年代起,刚度矩阵不变量就已应用于表征复合材料层合板的刚度特性及设计分析中^[13-14],但并没有将其作为独立的工程常数来使用。蔡氏模量即刚度矩阵的迹,也是一种刚度不变量,定义如下

$$\text{Tr}(\mathbf{Q}) = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66} = Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{66} \quad (4)$$

2 归一化方法

归一化是将复合材料面内刚度、面刚度进行量纲统一或者完全量纲一化的方法,也是复合材料刚度相似性发现的基础。不变量理论中有厚度归一化和Trace归一化两种方法,厚度归一化使得刚度系数与层合板厚度无关,Trace归一化使得刚度系数、等效工程常数量纲一化,便于不同材料之间刚度属性进行对比。

2.1 厚度归一化

基于经典层合板理论,对层合板的等效面内刚度

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 和面外刚度 $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 进行厚度归一化处理,具体形式如下^[2]

$$\begin{cases} A^* = \frac{A}{h} \\ D^* = \frac{12D}{h^3} \end{cases} \quad (5)$$

式中, h 为层合板的厚度。

对于三阶横向剪切变形理论,厚度归一化横向剪切刚度矩阵 $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 和 $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 定义如下^[9]

$$\begin{cases} F^* = \frac{80}{h^5} F \\ H^* = \frac{448}{h^7} H \end{cases} \quad (6)$$

且存在以下关系

$$\text{Tr}(A^*) = \text{Tr}(D^*) = \text{Tr}(F^*) = \text{Tr}(H^*) = \text{Tr}(Q) \quad (7)$$

2.2 Trace 归一化

进一步用蔡氏模量 $\text{Tr}(Q)$ 对矩阵 A^* 和 D^* 、 F^* 和 H^* 进行归一化处理,可以得到量纲一的面内、面外及横向剪切刚度矩阵^[2,9]

$$\begin{cases} A^{**} = \frac{A^*}{\text{Tr}(Q)}, D^{**} = \frac{D^*}{\text{Tr}(Q)} \\ F^{**} = \frac{F^*}{\text{Tr}(Q)}, H^{**} = \frac{H^*}{\text{Tr}(Q)} \end{cases} \quad (8)$$

同理,对层合板的等效纵向模量 E_x 、横向模量 E_y 、面内剪切模量 G_{xy} 以及单向板的刚度系数 Q'_{ij} 进行如下归一化

$$\begin{cases} E_x^* = \frac{E_x}{\text{Tr}(Q)}, E_y^* = \frac{E_y}{\text{Tr}(Q)} \\ G_{xy}^* = \frac{G_{xy}}{\text{Tr}(Q)} \\ Q'_{ij}^* = \frac{Q'_{ij}}{\text{Tr}(Q)}, i, j = 1, 2, 6 \end{cases} \quad (9)$$

3 平均主刚度及虚拟单向板

平均主刚度和虚拟单向板是不同复合材料及单向板归一化之后刚度相似性的定量表征, Tsai 等^[2]通过对 15 种材料力学性能的分析发现,虽然不同材料纵向模量 E_1 差异很大,但是纵向模量 E_1 与 $\text{Tr}(Q)$ 的比值却趋于稳定,约为 0.88 左右,且变异系数小于 3%,即

$$\frac{E_1}{\text{Tr}(Q)} \approx 0.88 \quad (10)$$

基于式(10),在测得材料的纵向模量的情况下,可以近似估算材料的蔡氏模量。另外,将不同材料量纲一化刚度系数的平均值 Q_{11}^* 、 Q_{22}^* 、 Q_{12}^* 以及 Q_{66}^* 定义为“Master Ply”,这里将其

意译为“平均主刚度”,即多种材料的归一化刚度的平均值。

在前期的研究工作中,对 228 种碳纤维增强复合材料的归一化刚度进行了统计分析^[11],验证了平均主刚度概念,统计数据分布情况如图 1 所示。

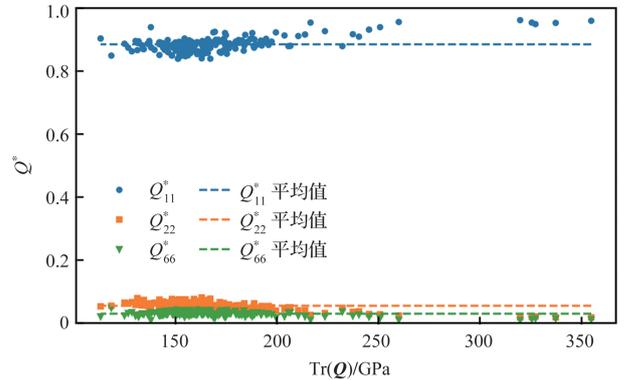


图 1 归一化刚度系数统计分析^[11]

Fig.1 Statistics of normalized stiffness coefficients^[11]

进一步对上述 228 种材料^[11]按照模量等级进行统计分析,表 1 分别给出了不同模量等级范围内归一化刚度系数及归一化模量的平均值及变异系数, Q_{11}^* 及 E_1^* 的变异系数均小于 2%。

这里将 E_1^* 、 E_2^* 、 G_{12}^* 的归一化平均值以及泊松比 ν_{12} 的均值定义为“虚拟单向板”,虚拟单向板的工程常数 E_1 、 E_2 、 G_{12} 可以通过式(9)获得。虚拟单向板代表的是一类碳纤维单向材料的量纲一工程常数,不同材料之间具有一定的相似性。可用于方案设计初期,选材不确定的情况下以替代材料的形式完成复合材料结构方案设计。

4 基于不变量的刚度分析验证

4.1 复合毯式曲线

复合毯式曲线是将多种材料的毯式曲线绘制在一起,可直观地查看不同材料、不同铺层比例的层合板刚度属性差异。本文作者此前通过绘制多种材料的复合毯式曲线直观地展示了不同碳纤维复合材料层合板在不同铺层比例下的归一化刚度系数及归一化等效弹性常数具有较好的一致性(见图 2)^[11]。尤其是在航空工程设计中常用的 0° 铺层和 90° 铺层比例低于 60% 的情况下,数据分散度极小,而典型航空层合板(由 0° 、 $\pm 45^\circ$ 及 90° 层组成的层合板)多采用 60/30/10、50/40/10、40/50/10、30/60/10、25/50/25 等铺层比例。因此可以推断,不同的复合材料层合板之间,可以通过蔡氏模量及平均主刚度信息进行刚度换算。

4.2 主毯式曲线

主毯式曲线是对不同材料、不同铺层比例层合板归一

表 1 228种材料按模量等级统计分析

Table 1 Statistical analysis on 228 materials by modulus grade

模量等级/GPa		Q_{11}^*	Q_{22}^*	Q_{12}^*	Q_{66}^*	E_1^*	E_2^*	G_{12}^*	ν_{12}
100~120	平均值/MPa	0.881	0.063	0.019	0.028	0.875	0.062	0.028	0.307
	变异系数/%	1.6	12.8	14.1	25.2	1.6	12.7	25.2	7.3
120~150	平均值/MPa	0.877	0.060	0.018	0.032	0.872	0.059	0.032	0.304
	变异系数/%	1.5	12.8	14.6	16.6	1.6	12.7	16.6	10.1
150~180	平均值/MPa	0.892	0.049	0.015	0.030	0.887	0.049	0.030	0.301
	变异系数/%	1.0	12.5	18.2	15.7	1.0	12.5	15.7	15.6
180~200	平均值/MPa	0.898	0.046	0.014	0.028	0.894	0.045	0.028	0.309
	变异系数/%	1.6	11.4	5.0	24.3	1.7	11.4	24.3	10.6
200~250	平均值/MPa	0.927	0.032	0.010	0.020	0.924	0.032	0.020	0.297
	变异系数/%	1.8	24.8	29.2	38.2	1.8	24.7	38.2	6.5
300~350	平均值/MPa	0.956	0.019	0.006	0.012	0.954	0.019	0.012	0.298
	变异系数/%	0.5	6.8	6.4	14.8	0.5	6.7	14.8	1.3
不确定	平均值/MPa	0.885	0.053	0.016	0.029	0.884	0.051	0.028	0.304
	变异系数/%	2.6	21.2	22.3	23.3	2.6	21.2	23.3	9.5

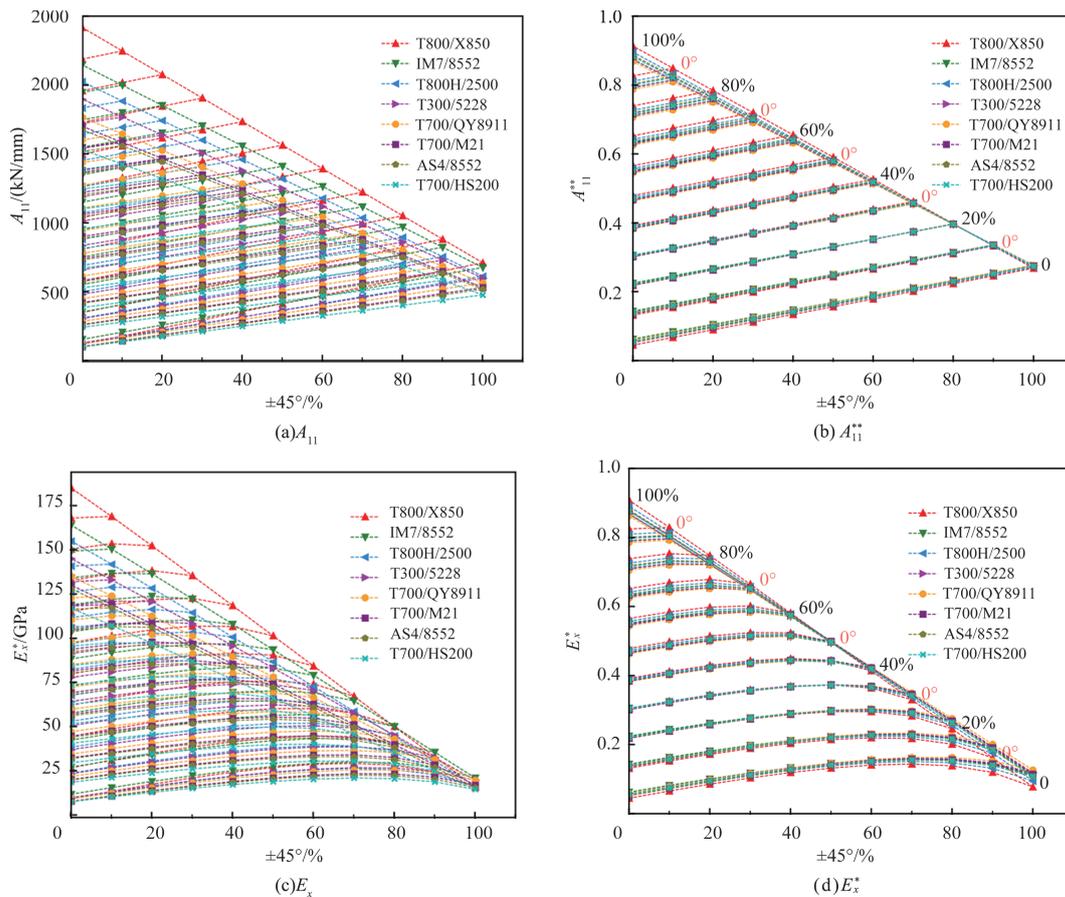


图2 多种材料复合毯式曲线^[9]

Fig.2 Carpet plots for multiple materials^[9]

化刚度相似性的定量表征。对前述228种碳纤维复合材料的归一化毯式曲线求平均值,可以近似得到具有一定普适性的“主毯式曲线”,如图3所示。

对于结构设计工程师,在需要计算不同材料、不同铺层比例层合板的等效刚度或者等效工程常数时,可以简单地通过查询主毯式曲线,然后按照式(5)、式(6)和式(8)、式(9)

线性计算获得层合板的等效刚度系数或等效工程常数,可避免复杂的矩阵运算,极大地降低工程师的设计分析难度。

4.3 数值验证

为了进一步证明上述结论,建立复合材料盒段有限元模型,分别采用三种基于蔡氏模量近似估算的材料属性和

真实材料属性进行有限元分析,对比翼盒整体挠度和应变水平,两类模型变形趋势一致(见图4),估算模型最大挠度与最大主应变相比真实材料模型偏差均小于1%,见表2。可以证实采用估算材料模型对整体复合材料结构进行估算分析误差可接受。

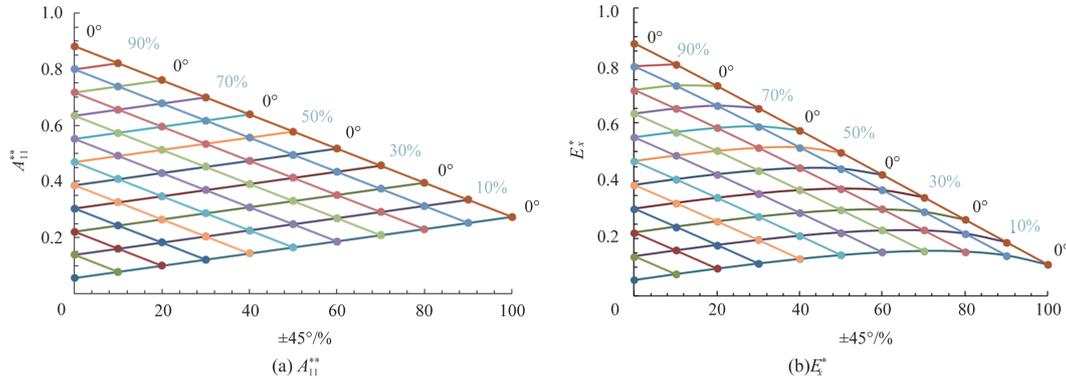


图3 主毯式曲线

Fig.3 Principal carpet plots

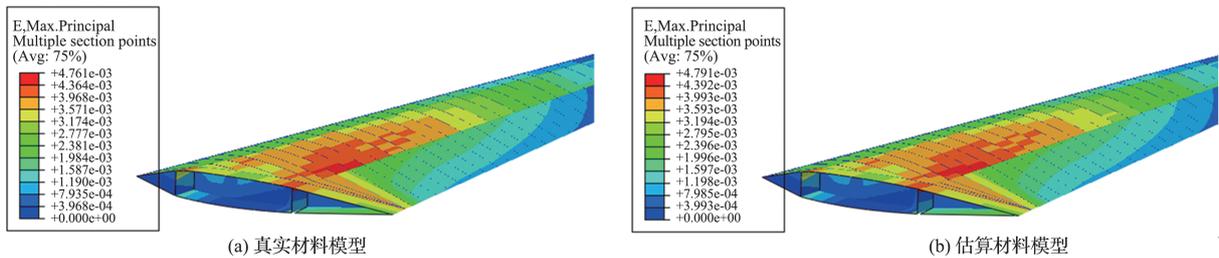


图4 真实材料模型与估算材料模型最大主应变对比

Fig.4 Maximum principal strain of real material model and estimated material model

表2 两种复合材料机翼模型挠度与应变对比

Table 2 Comparison between deflection and strain of two composite wing models

材料	E_1/GPa	E_2/MPa	ν_{12}	G_{12}/MPa	最大挠度/mm		偏差/%	最大主应变/ $\mu\epsilon$		偏差/%
					真实材料模型	估算材料模型		真实材料模型	估算材料模型	
T300/5228 ^[9]	145	9750	0.32	5600	1199	1205	0.50	4761	4791	0.63
T700/QY8911 ^[9]	135	9120	0.31	5670	1227	1235	0.65	4891	4929	0.78
T800H/2500 ^[9]	155	9000	0.30	4550	1179	1173	-0.51	4668	4662	-0.13

5 结论

通过研究,可以得出以下结论:

(1) 蔡氏模量可以作为唯一的工程常数,结合平均主刚度、主毯式曲线以及虚拟单向板开展复合材料结构初步方案设计和性能估算。对于典型的航空层合板,估算结果与真实材料有限元分析结果偏差可控制在3%以内。

(2) 采用主毯式曲线及基于蔡氏模量的线性缩放降低了复合材料层合板的分析难度,便于工程师快速开展结构方案设计。

(3) 基于蔡氏模量建立不依赖于选材的复合材料设计

流程,可以实现材料验证与方案设计同步并行,简化设计流程,提高设计效率。



参考文献

[1] MIL-HDBK-17-3F Department of defense handbook composite materials handbook. Volume 3: polymer matrix composites materials usage, design, and analysis[S]. Department of Defense, USA, 2002.

[2] Tsai S W, Melo J D D. An invariant-based theory of composites [J]. Composites Science and Technology, 2014, 100: 237-243.

- [3] Tsai S W, Melo J D D. Composite materials design and testing: Unlocking mystery with invariants[D]. United States: Stanford University, 2015.
- [4] Tsai S W, Sihm S, Melo J D D. Trace-based stiffness for a universal design of carbon-fiber reinforced composite structures [J]. Composites Science and Technology, 2015, 118: 23-30.
- [5] Tsai S W, Arteiro A, Melo J D D. A trace-based approach to design for manufacturing of composite laminates[J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2016, 35(7): 589-600.
- [6] Ha S K, Cimini C A. Theory and validation of the master ply concept for invariant-based stiffness of composites[J]. Journal of Composite Materials, 2017, 52(12): 1699-1708.
- [7] Guedes R M. Validation of trace-based approach to elastic properties of multidirectional glass fibre reinforced composites [J]. Composite Structures, 2021, 257: 113170.
- [8] Melo J D D, Bi J, Tsai S W. A novel invariant-based design approach to carbon fiber reinforced laminates[J]. Composite Structures, 2017, 159: 44-52.
- [9] Arteiro A, Sharma N, Melo J D D, et al. A case for Tsai's modulus, an invariant-based approach to stiffness[J]. Composite Structures, 2020, 252: 112683.
- [10] Millen S L J, Falzon B G, Aravand M A. Invariant based approaches in the design of composite laminates[J]. Composites Science and Technology, 2021, 202: 108526.
- [11] Jia Liyong, Zhang Chen, Li Jiaxi, et al. Validation and development of trace-based approach for composite laminates [J]. Composites Science and Technology, 2022, 221: 109348.
- [12] Erik K. On invariant combinations of Q_{ij} coefficients and a novel invariant IQ[J]. Composites Part C: Open Access, 2023, 10: 100335.
- [13] Tsai S W, Pagano N J. Invariant properties of composite materials[D]. Washington: Washington University, 1968.
- [14] Hosten B. Stiffness matrix invariants to validate the characterization of composite materials with ultrasonic methods[J]. Ultrasonics, 1992, 30(6): 365-370.

Stiffness Analysis on Composite Materials Based on Tsai's Modulus

Jia Liyong, Ma Suhui

AVIC The First Aircraft Institute, Xi'an 710089, China

Abstract: The anisotropy and layered stacking characteristics of composite materials require more engineering constant inputs and stiffness equivalent calculations compared to metal materials in the analysis process, which brings greater difficulty and computational complexity to the design and analysis on composite materials. The introduction of the Tsai's modulus provides a new approach for simplifying the analysis on composite laminated structures. This paper summarizes the concepts and methods of Tsai's modulus, average principal stiffness, thickness normalization, and Trace normalization. Through graded statistics of different material properties, virtual unidirectional lamina and principal carpet plot with certain engineering universality are defined, and the similarity of normalized stiffness of carbon fiber composite materials with significant differences is verified. The coefficient of variation of the principal stiffness is less than 3%. The finite element analysis on the wing box was conducted using the Tsai's modulus estimation material model and the real material model, respectively. The deviation between the wing deflection and maximum principal strain obtained from the estimated material model and the real material model was less than 1%, confirming the feasibility of using the Tsai's modulus as the only engineering constant in the analysis on the entire composite material structure. This provides a new technical approach for rapid scheme iteration in the initial design stage of the structure.

Key Words: Tsai's modulus; invariant; composite material; master ply; principal carpet plot; virtual laminar

Received: 2023-11-26; **Revised:** 2024-02-05; **Accepted:** 2024-04-03

Foundation item: Aeronautical Science Foundation of China(2017ZD03020)