基于模式空间变换的圆阵无源测向算法研究

Algorithm Research on Circular Array's Passive Direction Finding Based on Pattern Space Transformation

胡秀娟 孙灿飞 刘佳伟 孙源 刘涛 赵英梅／中航工业上海航空测控技术研究所

摘　要：建立了均匀圆阵测向系统模型，在其基础上利用模式空间变换方法将均匀圆阵转化为虚拟均匀线阵，使得ESPRIT算法得以应用，从而实现二维无源测向。为验证算法的可行性及可靠性，搭建了七元均匀圆阵实测系统。实验结果表明，该算法所用时间较短，且测向结果较为稳定，可应用于均匀圆阵无源测向系统。

关键词：空间谱估计；DOA估计；均匀圆阵；无源测向；ESPRIT算法；超分辨测向

Keywords：spatial spectrum estimation；DOA estimation；uniform circular array；passive direction finding；ESPRIT algorithm；super−resolution direction finding

0 引言

目前，以测向为目的的工程应用大多采用均匀线阵，这是因为基于空间谱估计算法的均匀线阵具有Vandermonde矩阵形式，便于数学处理，而且大多数算法只有在这种结构下才能实现。但由于本文应用的特殊性，采用了均匀圆阵。均匀圆阵可实现方位角和俯仰角的测量，并可保证方位角信息的360°全方位性、无模糊性。由于均匀圆阵的导向矢量矩阵不具有Vandermonde矩阵形式，使得很多算法不能直接用于均匀圆阵[1]。模式空间算法是针对均匀圆阵提出的一种空间谱估计算法，并获得了大量研究。如文献[2]～[7]研究了基于均匀圆阵的ESPRIT算法，即UCA−ESPRIT算法。该算法与ESPRIT算法不同，其建立在相位模式激励的基础上，并依赖于Bessel函数间的曲线关系。文献[8]在文献[2]的基础上提出了UCA−RB−MUSIC算法，克服了UCA−ESPRIT算法计算的复杂性。文献[9]基于相位模式激励，研究了UCA−ESPRIT算法和UCA−MUSIC算法，分析结果表明UCA−MUSIC算法对非连续的信号源具有较高的估计精度。文献[10]采用了ESPRIT算法，使用了一维搜索减少计算量。文献[11]寻找最优加权矩阵，并使用ESPRIT算法。文献[12]～[15]研究了基于模式空间变换的求根MUSIC算法。基于国内外学者对均匀圆阵测向的大量研究，本文利用模式空间变换将均匀圆阵转化成虚拟均匀线阵的方法，即采用基于模式空间变换的ESPRIT算法。

首先建立了均匀圆阵测向系统模型，并对测向原理进行了分析。在此基础上研究了无源测向算法的实现，最后对该算法进行了现场实验验证及分析。

1 均匀圆阵测向系统模型及分析

假设辐射性目标信源的个数为D；天线阵元各向同性、阵元间无互耦；各通道噪声为白噪声；信号与噪声相互独立；信号是由点源发出的窄带平面波；天线阵元数N大于信源个数D；阵元间距小于信号的半波长。对于阵元数为N的理想均匀圆阵测向系统，天线阵元结构如图1所示。

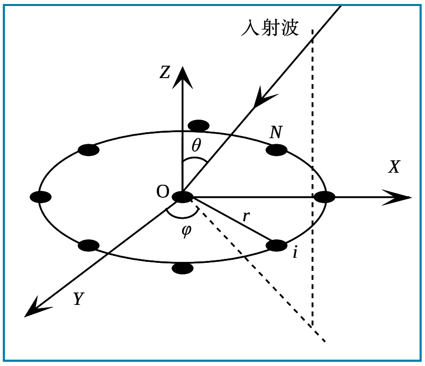

图1　均匀圆阵结构图

假设N个阵元均匀分布在半径为r的圆周上，笛卡尔坐标系的原点位于圆心。天线圆阵的第一号阵元在X轴正向，第i个阵元与X轴夹角为r。空中有D个不同方向的窄带平面波入射到圆阵上（其中$D<N$），入射俯仰角和方位角分别为$\theta_k,\varphi_k\ (k=1,2,\cdots D)$。则第$i$个阵元接收到的信号与原点处信号复包络之间的相位差为：

$$\psi_{ik}=e^{j\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\theta_k\cos(\varphi_k-\gamma_i)}=e^{j\varsigma_k\cos(\varphi_k-\gamma_i)} \tag{1}$$

其中$\varsigma_k=\dfrac{2\pi r}{\lambda}\sin\theta_k$。第$i$个阵元上的输出为：

$$x_i(t)=\sum_{k=1}^{D} b_i(\theta_k,\varphi_k)s_k(t)e^{j\varsigma_k\cos(\varphi_k-\gamma_i)}+n_i(t)\quad(i=1,2,\cdots N) \tag{2}$$

其中 $b_i(\theta_k,\varphi_k)$是第i个阵元对第k个信号的增益，$s_k(t)$是第k个信号波形，$n_i(t)$是第i个阵元和通道的噪声，噪声间相互独立且与信号无关。阵元各向同性时$b_i(\theta_k,\varphi_k)=1$，此时式（2）可写为：

$$x_i(t)=\sum_{k=1}^{D} s_k(t)e^{j\varsigma_k\cos(\varphi_k-\gamma_i)}+n_i(t)=\sum_{k=1}^{D} a_{ik}s_k(t)+n_i(t) \tag{3}$$

$(i=1,2,\ldots\ldots N)$

其中，$a_{ik}=e^{j\varsigma_k\cos(\varphi_k-\gamma_i)}$表示输入信号相位的变化。输出是对输入产生$a_{ik}$相移后的信号，这些移相信息因俯仰角$\theta_k$、方位角$\varphi_k$以及阵元位置$\gamma_i$的不同而不同，因此，各阵元输出信号的相位信息中包含目标俯仰角θ_k、方位角φ_k信息，测向的目的是从输出信号中分离出这些角度。

用矩阵矢量形式表示，式(3)变为

$$\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \cdots\\ x_N(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{j\varsigma_1\cos(\varphi_1-\gamma_1)} & \cdots & e^{j\varsigma_D\cos(\varphi_D-\gamma_1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{j\varsigma_1\cos(\varphi_1-\gamma_N)} & \cdots & e^{j\varsigma_D\cos(\varphi_D-\gamma_N)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1(t)\\ s_2(t)\\ \cdots\\ s_D(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n_1(t)\\ n_2(t)\\ \cdots\\ n_N(t)\end{bmatrix} \tag{4}$$

或简写为 $X(t)=A(\theta,\varphi)S(t)+n(t)=AS(t)+n(t)$ (5)

其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1D}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{N1} & \cdots & a_{ND}\end{bmatrix}\quad(a_{ik}=e^{j\varsigma_k\cos(\varphi_k-\gamma_i)}\ k=1,2,..D;i=1,2,..N)$$ 。

矩阵A中的列矢量又叫导向矢量，矩阵A还可以用导向矢量的方式表达：

$$\begin{cases} a(\vartheta)=a(\varsigma,\varphi)=[e^{j\varsigma\cos(\varphi-\gamma_1)}\quad e^{j\varsigma\cos(\varphi-\gamma_2)}\quad\cdots\quad e^{j\varsigma\cos(\varphi-\gamma_N)}\\ \qquad=[a_1(\varsigma,\varphi),a_2(\varsigma,\varphi),\ldots,a_N(\varsigma,\varphi)]^{\mathrm{T}}\\ A=[a(\varsigma_1,\varphi_1)\ \ \ldots\ \ a(\varsigma_D,\varphi_D)]\end{cases} \tag{6}$$

其中，$a(\vartheta)$是入射波(ς,φ)在圆阵上的导向矢量。

式(5)为理想均匀圆阵标准数学模型，其中$X(t)$为阵列输出采样数据矢量；$S(t)$和$n(t)$分别为信号源数据矢量和阵列噪声矢量；A为$N\times D$的阵列流形矩阵，又叫作DOA矩阵，A中含有目标信号的个数和目标信号的俯仰角 θ_k(有时也把ς_k叫做俯仰角)、方位角φ_k二维角度信息。利用输出采样数据矢量$X(t)$和阵列测向算法，估计出矩阵A中包含的目标方向角信息就是对目标的测向。

2 无源测向算法分析及实现

2.1 模式空间虚拟输出的推导

任何天线的激励信号都具有周期性，因此可用傅里叶级数表示为：

$$E(\gamma)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{jm\gamma}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m(\gamma) \tag{7}$$

令$w_m^H=\frac{1}{N}[e^{jm\gamma_1}\quad e^{jm\gamma_2}\quad\cdots\quad e^{jm\gamma_N}]$，具有$N$个天线阵元的均匀圆阵相当于$N$元离散圆阵。由Bessel函数的性质知道，当$m>k_0r$时，$J_m(\varsigma_k)\approx 0$。若记$M=[k_0r]$（对$k_0r$向下取整），对于离散圆阵，当取阵元数$N>2M$时，推导出远场方向图为：

$$F_m(\varsigma,\varphi)=w_m^H a(\varsigma,\varphi)\approx j^{|m|}J_{|m|}(\varsigma)e^{jm\varphi} \tag{8}$$

由式(8)可知，矩阵w_m^H把阵元空间的导向矢量$a(\varsigma,\varphi)$变成了相位模式空间的相位模式 $F_m(\varsigma,\varphi)$。

令$M'=2M+1$，引入三个$M'\times N$阶转换矩阵F_e^H、F_r^H和F_u^H，使得 $F_e^H=C_eV^H$，$F_r^H=W^HF_e^H$，$F_u^H=C_uV^H$成立。其中$C_e=diag(j^{-M}\ldots j^{-1},j^0,j^{-1}\ldots j^{-M})$，$V^H=\sqrt{N}[w_{-M}\ \ \ldots\ \ w_0\ \ \ldots\ \ w_M]^H$，$W=\frac{1}{\sqrt{M'}}[v(\alpha_{-M})\ \ \ldots\ \ v(\alpha_0)\ \ \ldots\ \ v(\alpha_M)]$ 是$M'\times M'$阶中心Hermitian矩阵，且$v(\varphi)=[e^{-jM\varphi}\ \ \ldots\ \ e^{-j\varphi}\ \ e^{j0}\ \ e^{j\varphi}\ \ \ldots\ \ e^{jM\varphi}]$，$\alpha_i=\frac{2\pi}{\sqrt{M'}}i$，$C_u=diag(j^M\ldots j^1,j^0,j^{-1}\ldots j^{-M})$。则得到三个$(2M+1)\times 1$阶矢量 $a_e(\vartheta)=F_e^Ha(\vartheta)$，$a_r(\vartheta)=F_r^Ha(\vartheta)$，$a_u(\vartheta)=F_u^Ha(\vartheta)$。其中 $a_e(\vartheta)$、$a_r(\vartheta)$和$a_u(\vartheta)$是模式空间矢量，矩阵F_e^H、F_r^H和F_u^H是把阵元空间导向矢量$a(\vartheta)$转换为模式空间矢量的转换矩阵。阵元空间的阵列输出$X(t)$对应模式空间虚拟输出X'为：

$$X'=F_r^HX=F_r^H(AS+n)=A_rS+F_r^Hn \tag{9}$$

其中A_r是以$a_r(\vartheta_k)(k=1,2,\cdots D)$为列构成的实值矩阵。

2.2 模式空间二维ESPRIT算法分析

在模式空间中，虚拟输出X'的协方差矩阵为：

$$R_{X'}=E[X'X'^H]=A_rE[SS^H]A_r^H+F_r^H\sigma^2F_r=A_rR_SA_r^H+\sigma^2I \tag{10}$$

假设$R=Re(R_x)$代表X'的协方差矩阵的实部，则有：

$$R=Re(R_x)=A_rR_{SR}A_r^H+\sigma^2I \tag{11}$$

其中$R_{SR}=Re(R_S)$，为信号协方差矩阵R_S的实部。

式(11)表明，对协方差矩阵R_x的实部进行特征分解，就可以得到模式空间中的信号子空间和噪声子空间。若用S_r代表信号子空间，那么模式空间的信号子空间S_r位于矩阵A_r的D个列矢量构成的空间$R\{A_r\}$中，即$R\{S_r\}=R\{A_r\}$。或者表示为：

$$S_r=A_rT \tag{12}$$

令$C_0=C_uC_e^H=diag((-1)^M\ldots(-1)^1,1,1\cdots1)$，则 $F_u^H=C_0WF_r^H$从而得到F_u^H和F_r^H对应信号子空间的关系：

$$S_u=C_0WS_r=C_0WA_rT=A_uT \tag{13}$$

由式(13)可知：

$$a_u(\vartheta)=C_uV^Ha(\vartheta)=\sqrt{N}[J_{-M}(\varsigma)e^{-jM\varphi}\ \ldots.\ J_M(\varsigma)e^{jM\varphi}]^T \tag{14}$$

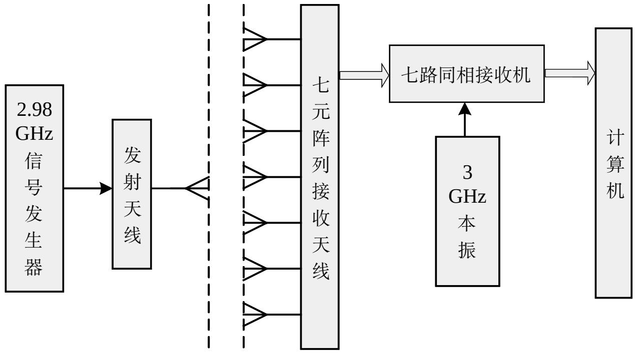

图2　测向实验系统原理图

以$a_u(\vartheta_k)(k=1,\cdots,D)$为列构造$M'\times D$阶矩阵$A_u$，再利用Bessel函数的性质可得：

$$\Gamma A_u^0 = A_u^{-1}\Phi + A_u^1\Phi^* \tag{15}$$

其中，$\Phi = diag[\sin\theta_1 e^{j\varphi_1}, \sin\theta_2 e^{j\varphi_2}, \ldots, \sin\theta_D e^{j\varphi_D}]$，

$$\Gamma = \frac{\lambda}{\pi r} diag[-(M-1), -(M-2), \ldots, 0, \ldots, M-2, M-1]$$，

A_u^0, A_u^1, A_u^{-1}分别是从矩阵$A_u(\vartheta)$中第一、第二和第三行开始抽取的$(2M-1)\times D$阶子阵。

由式(13)和式(15)可得:

$$\Gamma S_u^0 = S_u^{-1}T^{-1}\Phi T + S_u^1 T^{-1}\Phi^* T \tag{16}$$

或

$$\Gamma S_u^0 = E\Psi \tag{17}$$

其中，$E=[S_u^{-1} \vdots S_u^1]$，$\Psi = \begin{bmatrix} T^{-1}\Phi T \\ T^{-1}\Phi^* T \end{bmatrix}$；$S_u^{-1}, S_u^0, S_u^1$分别是从$S_u$中第一，第二和第三行开始抽取的$(2M-1)\times D$阶子阵。

式(17)还可以表示为：

$$\Gamma\Delta^0 C_0 W S_r = E\Psi \tag{18}$$

其中，$E=[\Delta^{-1}C_0 W S_r \vdots \Delta^1 C_0 W S_r]$，$\Delta^i C_0 W S_r = \Delta^i S_u = S_u^i$，$i=-1,0,1$。

根据上述推导过程可知，要实现测向，首先要求出阵元空间与模式空间的转换矩阵F_e^H和F_r^H，进而得到相位模式空间输出的协方差阵R_x，然后再取R_x的实部：$R=Re(R_x)$，对R进行特征分解得到信号子空间S_r；由式(18)求出矩阵Ψ，从Ψ的上半部分或下半部分都可以求出Φ矩阵中包含的目标方向角(θ_k,φ_k)。

3 仿真结果及实测数据误差分析

当用信号发生器发射2.98GHz的高频信号模拟S波段雷达目标信号时，七阵元均匀圆阵测向系统原理如图2所示，阵元的方向图如图3所示。

当均匀圆阵有N个阵元、对空中D个信源测向、$M'=2M+1$个相位模式、取K次采样数据时，用模式空间ESPRIT法测向，需要进行的乘法和加法次数大约为$N^2(2M'+K-1)+M'^2(N+2)+(M'-2)^2(2M'-D)$次。假设用TMS320C6×××系列DSP芯片实现测向运算(2400MIPS)，测向时间为毫秒量级，表明ESPRIT测向法测向所需时间较短。

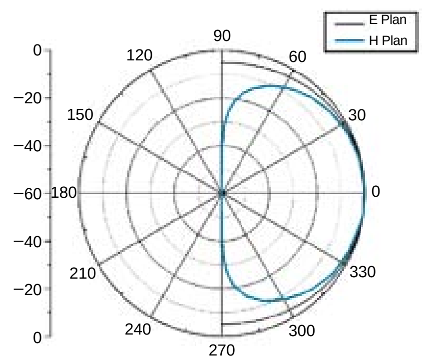

图3　天线阵元方向图

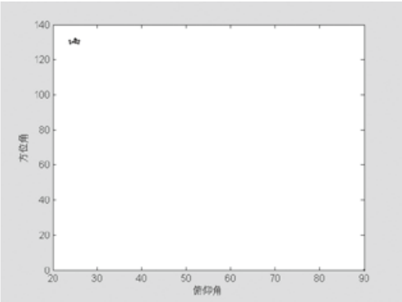

图4　模式空间ESPRIT法对单一目标测向结果

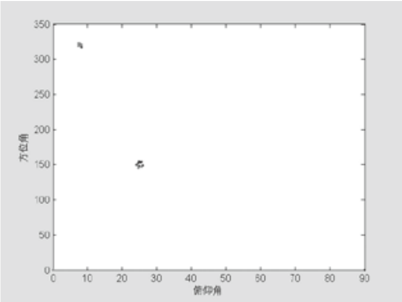

图5　模式空间ESPRIT法对两个目标测向结果

当均匀圆阵阵元个数N=7、信噪比SNR=5dB、采样点K=200、信号频率f=5GHz时，用模式空间ESPRIT方法对单一目标信号和两个目标信号分别测向，单一信号位于$(25^\circ, 130^\circ)$；两个信号分别位于$(25^\circ, 150^\circ)$，$(8^\circ, 320^\circ)$时，重复10次测向，结果分别如图4、图5和表1、表2所示。

从图中和测向数据表中看出，无论是对单目标，还是对双目标测向，测出的目标方位角和俯仰角都在角度真值附近，这说明模式空间ESPRIT算法适用于该测向系统。实验过程中，当信号频率大于3GHz时，采样点在100~200，信噪比大于1dB，都可得到稳定的测向结果。当信号频率小于3GHz时，采样点大于500时可得到稳定的测向结果。

4 结论

本文通过对圆阵测向的建模分析和ESPRIT算法的推导，利用模式空间变换方法将均匀圆阵转化成虚拟均匀线阵，使ESPRIT算法得以应用。通过建立无源测向实验系统，检验算法的可行性和可靠性，测向系统中发射信号为

表1　用模式空间ESPRIT法对单目标的10次测向数据

真值	估计值									
俯仰25°	25.010	25.080	24.605	24.968	24.589	24.898	24.774	24.908	25.067	24.950
方位130°	129.732	130.182	129.01	129.950	128.971	129.732	130.280	130.325	130.548	129.629

表2　用模式空间ESPRIT法对两个目标的10次测向数据

真值	估计值									
俯仰25°	25.105	25.107	24.919	25.138	25.184	25.236	25.158	24.953	25.199	25.034
方位150°	149.451	146.018	152.172	151.124	148.965	152.374	153.863	151.834	152.76	153.482
俯仰8°	8.084	8.384	7.876	7.965	8.191	7.893	8.063	7.924	8.137	7.872
方位320°	319.541	320.369	320.154	321.034	320.937	318.923	322.581	319.734	320.591	323.624

2.98GHz，作为无源测向的源信号，并用七元阵列天线进行接收，然后利用基于模式空间变换的ESPRIT算法对其进行处理。实验得出，当信号频率大于3GHz时，采样点在100~200，信噪比大于1dB，可得到稳定的测向结果。当信号频率小于3GHz时，采样点大于500时可得到稳定的测向结果。该结果表明，基于模式空间变换的ESPRIT算法测向时间较短，估计值接近真值，测向结果较为稳定。 AST

参考文献

[1] 王永良. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京：清华大学出版社. 2009−5.

[2] Zoltoski M D, Mathews C P. Closed−form 2D angle estimation with uniform circular array via phase mode excitation and ESPRIT[C]//1993 conference record of the twenty−seventh asilomar conference on signals, systems and computers. Pacific Grove, CA, USA: 1993−12:169−173.

[3] Kareem A, Jabr A L. Modified UCA−ESPRIT and modified UCA−ROOT−MUSIC for estimating DOA of coherent signals using one snapshot[D]. Abudhabi: Ajman University of Science and Technology, 2005.

[4] 甄佳奇. 基于虚拟阵列的相干信号快速测向算法[J]. 吉林大学学报（工学版），2010(3):48−851.

[5] Yang Liming, Zhang Hong,Yang Xiaorong. DOA estimation for wideband sources based on UCA[J]. Journal of Electronics, 2006, 23(1):128−131.

[6] Mathews C P, Zoltowski M D. Performance analysis of the UCA−ESPRIT algorithm for circular ring arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994,42(9): 2535−2539.

[7] Mathews C P. Enhancing UCA−ESPRIT for non−circular sources[J]. Signal Processing and Its Applications, 2007.

[8] Mathews C P, Zoltowski M D. Eigenstructure techniques for 2−D angle estimation with uniform circular arrays[J]. IEEE Trans. on signal processing, 1994, 42(9): 2395−2407.

[9] Lian Xiaohua, Zhou Jianjiang. 2−D DOA estimation for uniform circular arrays with PM[C]// Antennas, Propagation & EM Theory, 2006.

[10] Chang Ann−Chen, Jen Chih−Wei. Subspace−based techniques for 2−D DOA estimation with uniform circular zrray under local scattering[J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2006, 29(4): 663−673.

[11] Cheng Qi,Yang Runyu,Zhang Huimin. Optimally weighted ESPRIT using Uniform Circular Arrays[J]. Computers & Electrical Engineering, 2005, 31(4−5).

[12] Mathews C P, Zoltowski M D. Direction finding with circular arrays via phase mode excitation and Root−MUSIC[C]//1992 Antennas and Propagation Society International Symposium. Chicago IL, USA: 1992−7: 1019−1022.

[13] Zoltowski M D, Mathews C P. Direction finding with circular arrays via phase mode excitation and beamspace Root−MUSIC[C]// 1992 Antennas and Propagation Society International Symposium. Chicago IL, USA: 1992−7: 245−248.

[14] Goossens R, Rogier H, Werbrouck S. UCA Root−MUSIC with sparse uniform circular arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 2008, 56(8):4095−4099.

[15] Pan Jie, Zhou Jianjing. Beamspace PM−Root−MUSIC for uniform circular array based on MST[C]// International Joint conference on computational sciences and optimization. 2009−1: 899−901.

作者简介

胡秀娟，博士，主要从事雷达信号处理研究。

孙灿飞，高级工程师，主要从事测试技术、故障预测与分析研究。