

基于最小状态法的气动力有理函数拟合精度影响因素研究

高怡宁*, 谭申刚, 蒲利东

中航工业第一飞机设计研究院, 陕西 西安 710089

摘 要: 针对气动伺服弹性状态空间建模的需求, 介绍了非定常气动力有理函数拟合常用的最小状态法, 并以某大型飞机为例, 分析了不同的滞后根取值、个数及拟合约束对最小状态法拟合精度的影响, 得出了拟合参数选取的一般规律, 为气动伺服弹性状态空间建模打下基础。

关键词: 有理函数拟合; 气动伺服弹性; 最小状态法; 滞后根

中图分类号: V211 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-5453 (2014) 03-0054-5

气动伺服弹性(简称ASE)力学是一门柔性飞行器结构、非定常空气动力以及飞行控制系统三者相互作用的多学科技术。传统飞控系统采用单输入单输出控制, 可以采用经典控制理论进行ASE分析。而现代飞行器追求高性能, 往往具有多控制面, 其控制系统也是多输入多输出的。用于单输入单输出系统的传统经典控制理论分析与控制律设计手段已经不能满足现代气动伺服弹性分析的要求。20 世纪发展了一套以状态空间方法为基础的现代控制理论, 使得多输入多输出系统的分析问题得以解决。

气动伺服弹性系统的状态空间模型是进行多输入多输出系统ASE分析的前提。工程中由最常用的非定常气动力计算方法得到的气动力往往是频域离散矩阵的形式, 通过有理函数拟合将频域离散气动力延拓至拉氏域, 是气动伺服弹性状态空间建模的关键。有理函数拟合方法主要有三种: 最小二乘(LS)法、最小状态(MS)法、修正矩阵(MMP)法。LS法具有简单易算的优点, 近似拟合计算量最小, 但所增加的气动力维数过高; MS法拟合计算量大, 但可提供最低阶的状态空间模型; MMP法与LS法类似, 阶次较低, 但精度不如LS法。三种近似方法都面临着气动滞后根的选取问题, 取多少项、具体取什

么值对精度都有较大影响。其中最小状态法既能保证拟合后的气动力达到工程要求的精度, 同时具有在原状态向量中不过多增加气动力(状态)维数的优点, 应用较为广泛。采用最小状态法进行气动力有理函数拟合可以得到一个低阶、高精度的气动伺服弹性数学模型, 因此重点对该方法进行研究。

1 最小状态法气动力拟合理论

MS法有理函数近似公式为:

$$[Q_{ap}(\bar{s})] = [Q_0] + [Q_1]\bar{s} + [Q_2]\bar{s}^2 + \sum_{k=1}^N \frac{\{D_k\}\{E_k\}\bar{s}}{\bar{s} + r_k} \quad (1)$$

式中: $[Q_0], [Q_1], [Q_2]$ 均为 $n \times m$ 阶实矩阵, 是待求的拟合多项式系数矩阵; $\{D_k\}, \{E_k\}$ 分别为实的 n 阶列向量和 m 阶行向量; r_k 为实常数, 称作滞后根; N 为滞后根个数; $\bar{s} = \frac{sb}{V} = \gamma + ik$, 其中 $s = \sigma + i\omega$ 为 Laplace 变量; b 为参考长度; ω 为振动圆频率; σ 为运动衰减率; V 为飞行速度。

在拟合前, 已通过计算得到在频域若干减缩频率 k 值对应的非定常广义气动力矩阵:

$$[Q_l] = [Q(k_l)] = [F(k_l)] + i[G(k_l)] \quad (l=1, 2, \dots, L) \quad (2)$$

收稿日期: 2013-09-23; 录用日期: 2014-02-28

*通讯作者. Tel.: 029-86832512 E-mail: 493435633@qq.com

引用格式: GAO Yining, TAN Shengang, PU Lidong. Research on factors affecting precision of rational function aerodynamic approximation based on minimum-state method[J]. Aeronautical Science & Technology, 2014, 25(03): 54-58. 高怡宁, 谭申刚, 蒲利东. 基于最小状态法的气动力有理函数拟合精度影响因素研究[J]. 航空科学技术, 2014, 25(03): 54-58.

式中： $[F(k)]$ 、 $[G(k)]$ 分别为 $[Q(k)]$ 的实部和虚部； L 为减缩频率个数。各矩阵均为 $n \times m$ 阶实矩阵。

拟合的目的是根据频域中已知的气动力矩阵 $[Q(k)]$ 来确定式(1)中的各个待定矩阵。拟合计算时一般先给定一组 k_l ，当 $\bar{s} = ik_l$ 时，有 $[Q] = [Q_{ap}]$ ，即：

$$[Q_0] + ik_l [Q_1] - k_l^2 [Q_2] + \sum_{k=1}^N \frac{i\{D_k\}\{E_k\}k_l}{r_k + ik_l} = [F(k_l)] + i[G(k_l)] \quad (l=1, 2, \dots, L) \quad (3)$$

通常，确定各系数矩阵的方法是：先给定一组 r_k 及 $\{E_k\}$ ($k=1, 2, \dots, N$)，按行拟合出 d_k^i ($i=1, 2, \dots, n$)；然后由现有的 r_k 及 $\{D_k\}$ ，按列拟合求出 e_k^j ($j=1, 2, \dots, m$)；接下来计算拟合的精度，如果拟合的精度不满足要求则重复前面的过程，直到得出满意结果为止，根据经验，迭代次数一般取10次就能收敛。

2 拟合精度的衡量指标

2.1 气动力拟合误差

气动力拟合误差表征拟合的气动力系数矩阵的总体误差，其定义为：

$$J = \sqrt{\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |Q_{ap,ij}(k_l) - Q_{ij}(k_l)|^2} \quad (4)$$

式中： $Q_{ap,ij}$ 表示拟合的气动力系数矩阵元素； Q_{ij} 表示频域计算的气动力系数矩阵元素。

2.2 颤振计算精度

利用拟合后的气动力，代入气动弹性运动方程并进行Laplace变换得到状态空间方程。气动弹性状态空间方程矩阵 A 的特征值随速度变化形成的根轨迹图代表了系统的稳定性。对于气动弹性问题，可得到颤振的临界速度。对比根轨迹法与频域法颤振计算结果的差异，可以检验颤振减缩频率附近的气动力拟合精度。颤振计算精度是衡量气动力拟合精度的主要指标。

3 最小状态法气动力拟合精度影响因素分析

用最小状态法进行有理函数拟合，需要选择合适的滞后根。现有的滞后根选取方法主要有经验公式法和试凑法，其结果带有随意性。本节以某大型飞机为研究对象，建立其结构动力学模型和非定常气动力模型，在频域下用g-法进行颤振计算，并用最小状态法进行非定常气动力有理函数拟合，分析不同滞后根取值、个数及拟合约束对气动力拟合精度的影响，探究其一般规律，为气动伺服弹性状态空间建模打下基础。

3.1 滞后根取值的影响

在滞后根取少的情况下，取值就成为重要问题。只取一

个滞后根，在0.1~2.7之间均匀选取14个值作为滞后根取值，分析滞后根取值对拟合精度的影响。气动力拟合误差随滞后根取值的变化规律如图1所示，根轨迹法颤振计算结果随滞后根取值的变化及与频域法计算结果的对比曲线如图2所示。

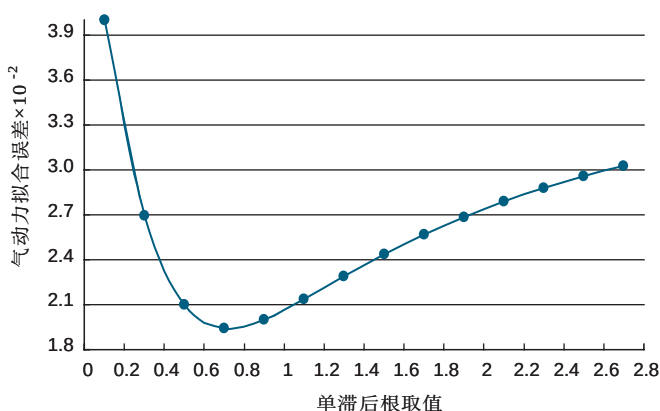
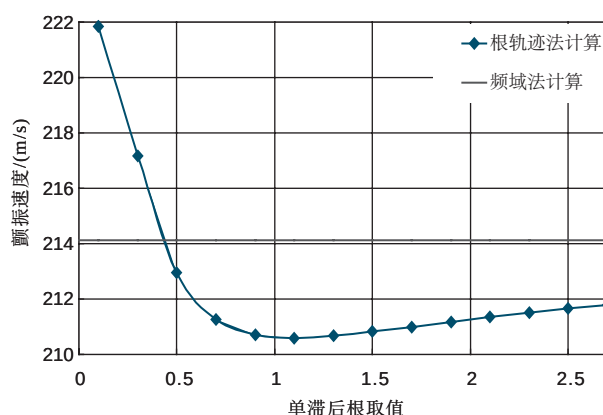
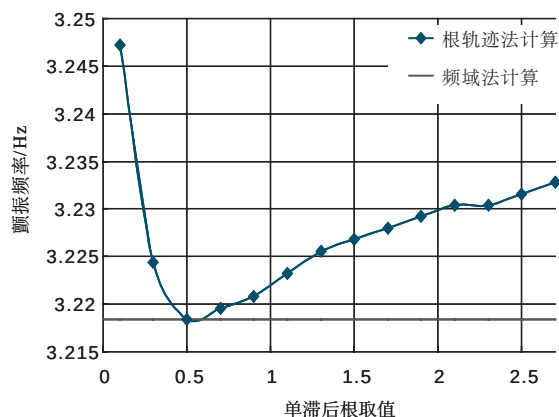


图1 气动力拟合误差随滞后根取值的变化曲线

Fig.1 Aerodynamic fitting error along with the change of lag roots value



(a) 颤振速度随滞后根取值的变化曲线



(b) 颤振频率随滞后根取值的变化曲线

图2 颤振计算结果随滞后根取值的变化曲线

Fig. 2 Flutter calculation results along with the change of lag roots value

根据滞后根选取的经验公式:

$$r_t = 1.7k_{\max} \left(\frac{t}{N+1} \right)^2 \quad (5)$$

式中: r_t 为第 t 个滞后根取值; $k_{\max}$ 表示减缩频率最大值。

对于本算例, 由经验公式得出的 $r_1=1.275$, 显然不是单滞后根的最优解。由图1可以看出, 滞后根取得过大或过小, 都会导致较大的气动力拟合误差。滞后根在0.5~0.9之间取值, 气动力拟合误差较小。根轨迹法计算的颤振速度、颤振频率在滞后根取0.5附近与频域法计算结果最接近。综合以上分析, 单滞后根在0.5附近取值, 气动力拟合结果较为理想。

3.2 滞后根个数的影响

利用式(5)的滞后根取值, 分别取1~10个滞后根, 气动力拟合误差随滞后根个数的变化如图3所示, 根轨迹法颤振

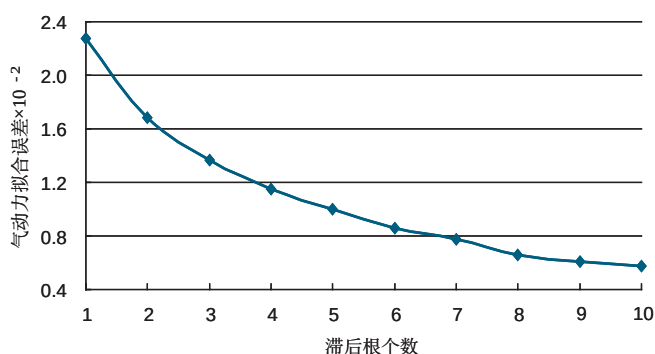
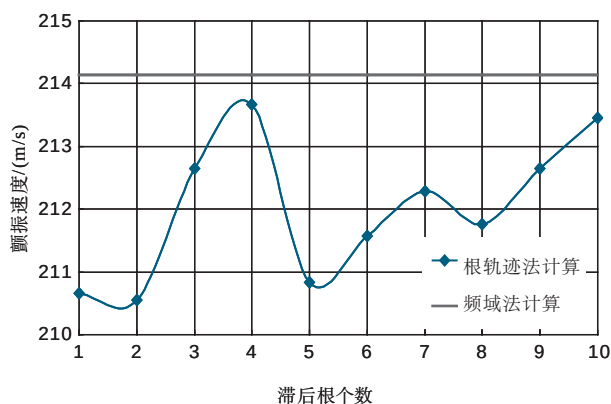


图3 气动力拟合误差随滞后根个数的变化曲线

Fig.3 Aerodynamic fitting error along with the change of lag roots number



(a) 颤振速度随滞后根个数的变化曲线

计算结果随滞后根个数的变化及与频域法计算结果的对比曲线如图4所示。

由图3可以看出, 滞后根取的越多, 气动力拟合误差越小。但是滞后根个数的增加会导致模型增阶, 使计算效率下降。由图4可以看出, 取4个滞后根时根轨迹法颤振计算结果与频域法结果最接近。权衡气动力拟合误差与颤振计算精度, 取4个左右滞后根, 拟合结果较为理想。

3.3 约束的影响

拟合约束有如下三种:

(1) 零频约束

$$Q_0 = F(0) \quad (6)$$

(2) k_f 处实部约束

$$k = k_f \text{ 时}$$

$$Q_2 = k_f^{-2} [F(0) - F(k_f)] + D(k_f^2 I + R^2)^{-1} E \quad (7)$$

$$k = k_l (l \neq f) \text{ 时}$$

$$D[(k_l^2 I + R^2)^{-1} - (k_f^2 I + R^2)^{-1}] E \approx k_l^{-2} [F(k_l) - F(0)] - k_f^{-2} [F(k_f) - F(0)] \quad (8)$$

(3) K_g 处虚部约束

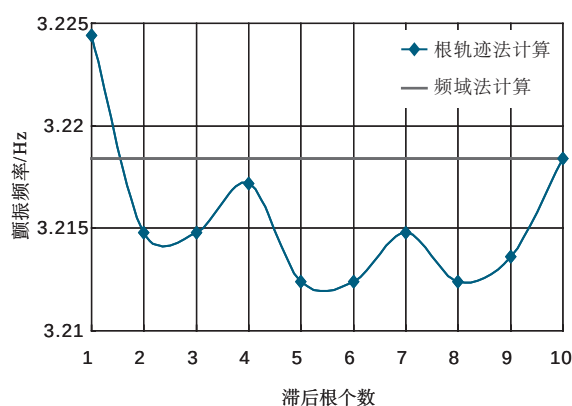
$$k = k_g \text{ 时}$$

$$Q_1 = k_g^{-1} G(k_g) - D(k_g^2 I + R^2)^{-1} R E \quad (9)$$

$$k = k_l (l \neq g) \text{ 时}$$

$$D[(k_l^2 I + R^2)^{-1} - (k_g^2 I + R^2)^{-1}] R E \approx k_l^{-1} G(k_l) - k_g^{-1} G(k_g) \quad (10)$$

取单滞后根 $r_1=0.5$ 时, 分别施加零频约束、 $k_{\max}$ 处的实部与虚部约束、颤振减缩频率 k_f 处的虚部约束, 分析拟合约束对拟合精度的影响。对比结果见表1。取两气动力拟合矩阵元



(b) 颤振频率随滞后根个数的变化曲线

图4 颤振计算结果随滞后根个数的变化曲线

Fig.4 Flutter calculation results along with the change of lag roots number

素 Q_{32} , Q_{44} 的计算值,施加上述拟合约束的气动力拟合矩阵元素 $Q_{ap,32}$, $Q_{ap,44}$ 与计算值的对比如图5所示。计算值表示利用偶极子格网法算出的气动力系数矩阵,无约束表示未加约束的MS法拟合,零频约束表示施加零频约束的MS法拟合,约束1表示在 $k_{\max}$ 处施加实部与虚部约束的MS法拟合,约束2表示在 k_f 处施加虚部约束的MS法拟合。

表1 不同约束条件拟合精度的比较
Table 1 Comparison of fitting precision under different constraint conditions

约束条件	气动力系数矩阵拟合误差	颤振速度误差/%	颤振频率误差/%
无约束	0.021	0.55	0
零频约束	0.027	2.16	0.11
约束1	0.424	/	/
约束2	0.062	1.2	0.19

由以上对比可以看出,约束的减缩频率点附近局部气动力拟合精度相对无约束情况有所提高,但整体气动力拟合精度降低。施加 $k_{\max}$ 处约束将导致较大的气动力拟合误差,并导致颤振形态的变化,在拟合过程中不可取。在拟合过程中不施加约束,或者施加零频约束,拟合结果较为理想。

4 结论

结合某飞机非定常气动力有理函数建模实例,对最小状态法气动力有理函数拟合的精度影响因素进行了分析,分

析结果表明:

- (1) 在进行MS法气动力有理函数拟合时,滞后根的选择应该综合考虑气动力拟合误差和颤振计算精度;
- (2) 滞后根取得过大或过小,都会导致拟合误差较大。滞后根数目越多,拟合误差越小,但是要保证拟合后的气动力达到工程要求的精度,同时在原状态向量中不过多的增加气动力(状态)维数,在实际应用中,建议4~6个为宜;
- (3) 施加约束可以提高约束减缩频率点处的局部气动力拟合精度,但是会降低总体气动力拟合精度,在 $k_{\max}$ 处的约束会导致较大的误差,不建议采用。在实际应用中,不施加约束或者施加零频约束拟合结果较为理想。

AST

参考文献

朱斯岩,陈桂彬.气动伺服弹性建模方法研究[C].中国空气动力学学会空气弹性专业委员会.第七届全国空气弹性学术交流会论文集.浙江;2001.

ZHU Siyan, CHEN Guibin. Penumatic servo elastic modeling method research[C]. Air Elastic Professional Committee, Chinese Aerodynamics Research Society. The 7th National Air Elastic Academic Conference Proceedings. Zhejiang: 2001. (in Chinese)

陈桂彬,邹丛青.气动伺服弹性技术在飞机设计中的应用[J].航空学报,1996,17(7):31-35.

CHEN Guibin, ZHOU Congqing. Application of aeroservoelastic technics on airframe design[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1996, 17(7): 31-35. (in Chinese)

吴志刚,万志强,陈桂彬.飞行器气动弹性原理[M].北京:北京

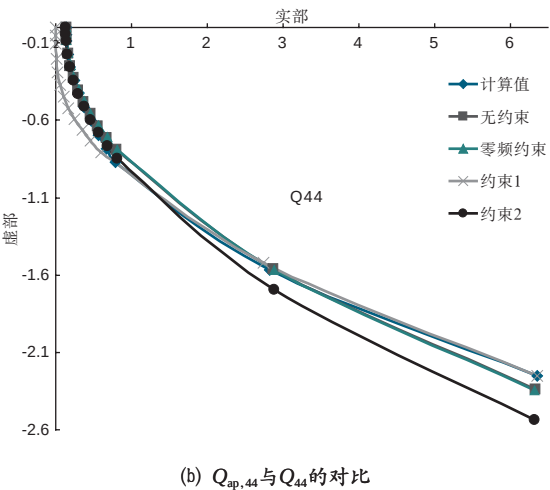
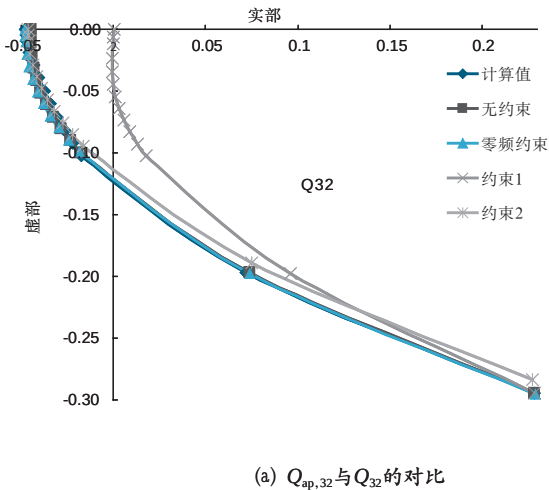


图5 气动力拟合矩阵元素与计算值对比
Fig.5 Aerodynamic fitting matrix element compared with calculated value

- [3] 航空航天大学出版社,2011.
WU Zhigang, WAN Zhiqiang, CHEN Guibin. Aerodynamic Elasticity Principle[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics & Astronautics Press, 2011. (in Chinese)
宋晨, 杨超, 吴志刚. 3种气动弹性状态空间建模方法的对比[J]. 航空学报, 2007, 28(增刊): 81-86.
[4] 航空学报, 2007, 28(增刊): 81-86.
SONG Chen, YANG Chao, WU Zhigang. Comparison of three aeroelastic state space modeling methods[J]. Acta Astronautica Sinica, 2007, 28(supplementary issue): 81-86. (in Chinese)
- 作者简介**
高怡宁(1989—) 女, 助理工程师。主要研究方向: 飞机颤振与气动伺服弹性设计。
Tel: 029-86832512
E-mail: 493435633@qq.com

Research on Factors Affecting Precision of Rational Function Aerodynamic Approximation Based on Minimum-State Method

GAO Yining*, TAN Shengang, PU Lidong
AVIC The First Aircraft Institute, Xi'an 710089, China

Abstract: The research aims at the requirements of aeroservoelasticity(ASE) state space modeling. The minimum state(MS) method, which is commonly used in unsteady aerodynamic approximation was introduced, and the selecting rules of approximation parameters were obtained by analyzing the effects of lag roots' values, numbers and constrains using a jumbo aircraft, which lays the foundation for ASE state space modeling.

Key Words: rational function approximation; aeroservoelasticity; minimum state method; lag roots