

一种非线性系统的弹簧力确定方法

秦锦*, 张玉杰, 高宏

中航工业第一飞机设计研究院, 陕西 西安 710089

摘要: 针对地面共振试验中出现的结构固有频率的不恒定问题, 提出了一种结构刚度非线性系统的分析方法。可以由试验测得的结构频率和激励力幅值, 得出系统的非线性弹簧力函数, 并确定系统弹簧性质, 最后通过算例分析, 验证了该方法的有效性及其可行性。

关键词: 非线性; 弹簧; 频率; 激励; 传递函数

中图分类号: TH135

文献标识码: A

文章编号: 1007-5453 (2016) 07-0053-04

在飞机的生产研发过程中,需通过地面共振试验(GVT)来测量飞机各阶模态频率、振型、阻尼等,并根据测试结果对动力学模型进行修正。而在进行飞机及其缩比模型的地面共振试验时,往往会从非线性结构部件(如旋转舵面、发动机、导弹及吊舱挂架、起落架舱门等)观察到:结构的某阶固有频率不恒定,它会随着激励力幅值的变化而变化。这对结构动态特征参数的识别和建模分析带来了较大困难。因此,有必要从理论上对该现象进行分析并给予建模指导。

在非线性振动问题中,有些学者应用了多种方法对非线性 Duffing 方程进行了求解^[1-3],有些学者对弹簧的非线性刚度进行了实验研究^[4,5]。而在现有的文献中没有对非线性系统固有频率不恒定问题的专题研究。

本文以单自由度非线性系统为例,从结构刚度非线性问题出发,对系统固有频率随激励幅值的变化规律进行理论分析,从而得出系统的弹簧特性参数。

1 理论分析

以单自由度振动系统为研究对象,如图 1 所示。

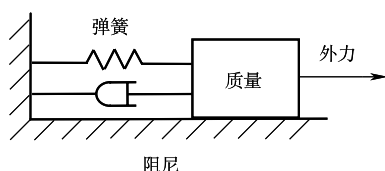


图 1 振动力学模型

Fig.1 Vibration mechanical model

根据振动理论,可建立如图 1 所示的系统响应方程为:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + f_k[x(t)] = f(t) \quad (1)$$

式中: m 为系统质量, c 为系统粘性阻尼, f_k 为以位移 x 为自变量的弹簧力, f_t 为外激励力。

这里将弹簧力 f_k 分为 3 种: 一是线性弹簧力, 即弹簧刚度不随 x 变化; 二是硬式弹簧力, 即弹簧刚度随 x 绝对值的增大而增大; 三是软式弹簧力, 即弹簧刚度随 x 绝对值的增大而减小。

为了便于说明, 此处对上述 3 种弹簧力函数进行了假设, 其中, 线性弹簧力为:

$$f_{k,1}(x) = 900x \quad (2)$$

硬式弹簧力为:

$$f_{k,2}(x) = 100 \operatorname{sign}(x)x^2 \quad (3)$$

软式弹簧力为:

$$f_{k,3}(x) = 2700 \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|} \quad (4)$$

式中: sign 为符号函数, 定义如下:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1: & x < 0 \\ 0: & x = 0 \\ 1: & x > 0 \end{cases}$$

在航空工程中, 正弦扫频法是测试飞机结构各阶固有频率的一种常用方法。其具体步骤为: (1) 确定激励频率范围, 选定激励力幅值; (2) 在选定频率范围内对结构进行扫频激励, 同时测量结构的加速度响应; (3) 将不同频率下的加速度幅值除以激励幅值, 得到系统的传递函数, 最后根据传递函数峰值确定系统固有频率。图 2 为弹簧力曲线。

收稿日期: 2016-06-23; 录用日期: 2016-06-29

* 通讯作者: Tel.: 029-88632797 E-mail: qjinmail@163.com

引用格式: QIN Jin, ZHANG Yujie, GAO Hong. The determination method of non-linear system's spring force [J]. Aeronautical Science & Technology, 2016, 27(07): 53-56. 秦锦, 张玉杰, 高宏. 一种非线性系统的弹簧力确定方法 [J]. 航空科学技术, 2016, 27(07): 53-56.

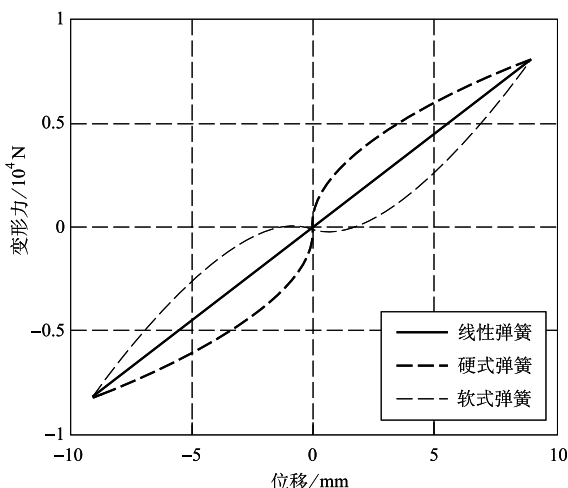


图2 弹簧力曲线
Fig.2 Curves of spring force

由上述固有频率的正弦扫频测试过程可知,根据式(1)分析系统固有频率随激励幅值的变化规律,需求解不同激励频率和幅值下系统的加速度响应。

采用中心差分法计算式(1)所示的振动响应。其中,加速度和速度的中心差分公式为:

$$\ddot{x}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (x_{t-\Delta t} - 2x_t + x_{t+\Delta t}) \quad (5)$$

$$\dot{x}_t = \frac{1}{2\Delta t} (-x_{t-\Delta t} + x_{t+\Delta t}) \quad (6)$$

式中: Δt 为时间步长。

将式(5)和式(6)代入式(1)并整理,可得 $t+\Delta t$ 时刻系统的位移:

$$x_{t+\Delta t} = \left[f_t - f_k(x_t) + \frac{2m}{\Delta t^2} x_t - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{t-\Delta t} \right] / \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) \quad (7)$$

应用递归算法,根据式(7)可求解不同时刻的位移响应,将求得的位移响应代入式(5),可以计算出加速度响应。

特别地, $t=0$ 时刻,需要已知 $x_{\Delta t}$ 。将式(5)和式(6)中的 $t=0$,联立两式可得:

$$x_{-\Delta t} = x_0 - \Delta t \dot{x}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_0 \quad (8)$$

2 算例说明

设质量 $m=1\text{kg}$, 阻尼 $c=0$, 弹簧力 f_k 分别取式(2)~式(4)所示的表达式,激励力表示为:

$$f(t) = F \sin(2\pi ft) \quad (9)$$

激励力幅值 F 的取值分别为 2000N, 4000N, 6000N, 8000N, 10000N, 激励力频率 f 的取值范围为 0.1~10Hz, 扫频

步长 0.1Hz, 计算时间步长 $5 \times 10^{-5}\text{s}$ 。

在零初始条件下,对上述正弦扫频的测试方法进行模拟,采用中心差分法分别计算前文提到的 3 种弹簧系统的加速度响应,得到加速度比力的传递函数 (FRF)。

图 3 显示了线性系统的传递函数,从图中可以看出,所有曲线重合在一起,表明传递函数曲线不随激励幅值变化。峰值频率均为 4.8Hz,这与线性系统固有频率的理论值 $\sqrt{900/1}/(2\pi)=4.8\text{Hz}$ 一致,验证了数值计算方法的准确性。

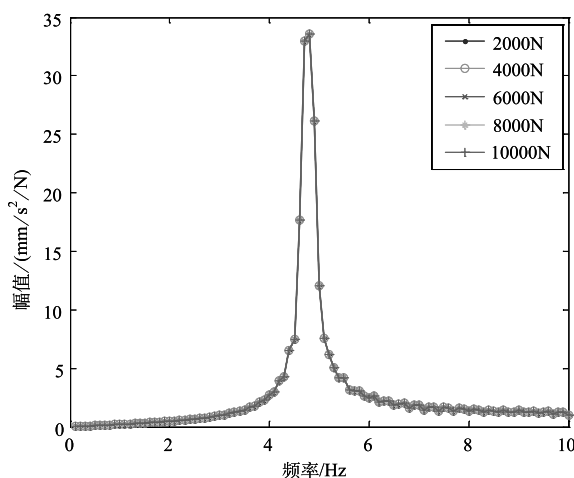


图3 线性弹簧系统的传递函数
Fig.3 FRF curve of linear spring system

图 4 和图 5 分别显示了硬式弹簧系统和软式弹簧系统的传递函数,由图中可以看出,传递函数曲线随激励幅值的变化出现明显偏移:硬式弹簧系统曲线整体右偏,软式弹簧系统曲线整体左偏。这种现象表明,硬式弹簧系统的固有频率随激励幅值的增大而增大,软式弹簧系统的固有频率随激励幅值的增大而减小。

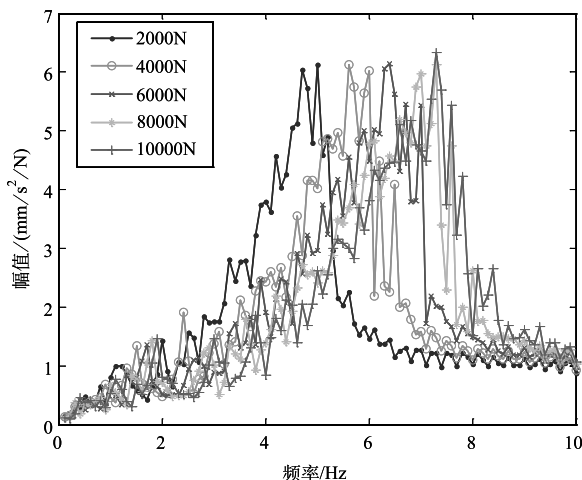


图4 硬式弹簧系统的传递函数
Fig.4 FRF curve of hard spring system

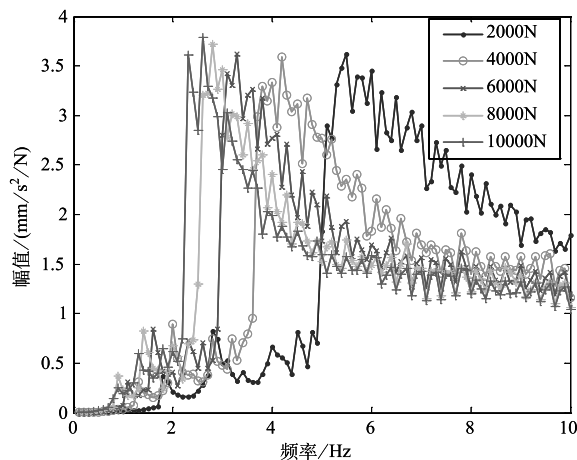


图5 软式弹簧系统的传递函数
Fig.5 FRF curve of soft spring system

图6比较了3种系统峰值频率随外力幅值的变化曲线,由图中可以看出3种弹簧系统的峰值频率变化趋势:线性弹簧系统峰值频率恒定;硬式弹簧系统的峰值频率随外力幅值的增大而增大,并且增势逐渐放缓;软式弹簧系统的峰值频率随外力幅值的增大而减小,并且减势也逐渐放缓。

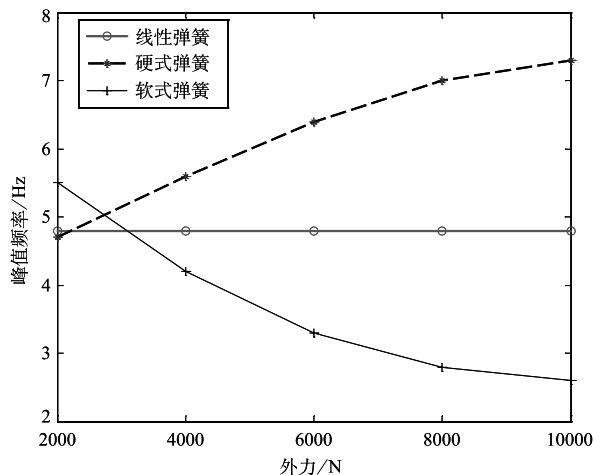


图6 峰值频率随外力幅值的变化趋势
Fig.6 Peak frequency changes with external force

在忽略阻尼影响的情况下,分析产生这种现象的原因在于:外力越大,系统的位移响应也越大,因此,硬式弹簧系统的刚度增大,固有频率升高;软式弹簧系统的刚度减小,固有频率降低;而线性系统的刚度与位移无关,固有频率不变。

3 应用研究

以上对非线性结构频率随激励幅值变化规律的研究,对实际结构模态测试及分析具有重要意义,其主要应用包括:

(1) 根据试验测得的峰值频率随外力幅值变化的趋势

线,定性判定结构是否属于非线性系统以及非线性弹簧力的类型;

(2) 根据试验测得的峰值频率随外力幅值的变化趋势,定量拟合出弹簧力函数。

在飞机模型地面共振试验中,结合试验结果,根据上述应用(1)对发动机挂架刚度、舵面旋转刚度等非线性系统进行定性判断,进而对设计模型的修正提供可靠依据。图7为某地面共振试验中,飞机方向舵舵面旋转频率随激励力幅值变化趋势的试验结果。可以得出,结构属于非线性系统,其弹簧力类型为软弹簧系统。

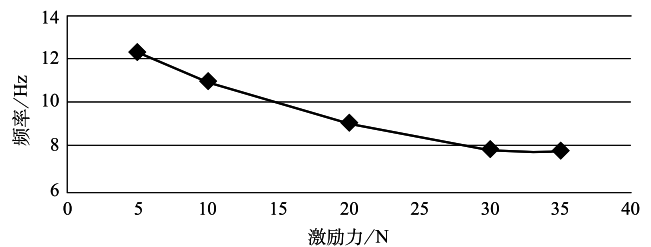


图7 峰值频率随激励力幅值的变化趋势(试验结果)
Fig.7 Peak frequency changes with exciting force (test result)

下面对上述应用(2)进行详细说明。如式(10)所示,Duffing方程常用来描述非线性振动系统。

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \mu x^3(t) = f(t) \quad (10)$$

式中: k 为线性刚度系数; μ 为立方项刚度系数, $\mu > 0$ 表示硬式弹簧力, $\mu < 0$ 表示软式弹簧力。

对式(10)进行傅里叶变换,可得位移幅 $X(\omega)$ 与外力幅 $F(\omega)$ 之间的关系:

$$(-m\omega^2 + k)X(\omega) + \mu X^3(\omega) = F(\omega) \quad (11)$$

根据扫频试验得到力幅 $F(\omega)$ 、位移幅 $X(\omega)$ 和峰值频率 ω ,由最小二乘法可以拟合出刚度系数 k 和 μ 。

表1显示了某简化单自由度系统的模态测试结果。可见,峰值频率随外力幅的增加而降低,说明结构属于软弹簧系统。

表1 模态测试结果
Table 1 Test results of mode

序号	外力幅/N	位移幅/mm	峰值频率/Hz
1	10	0.3	15.636
2	20	0.5	14.886
3	30	1.5	14.185

将表1中的数据代入式(11)建立矛盾方程组,利用最小二乘法求解可得, $k=231631\text{N/m}$, $\mu=-7.0656 \times 10^{10}$ 。

图8显示了拟合得到的弹簧力曲线。可以看出,弹簧

刚度随位移绝对值的增大而减小,进一步验证了系统的软弹簧力属性。

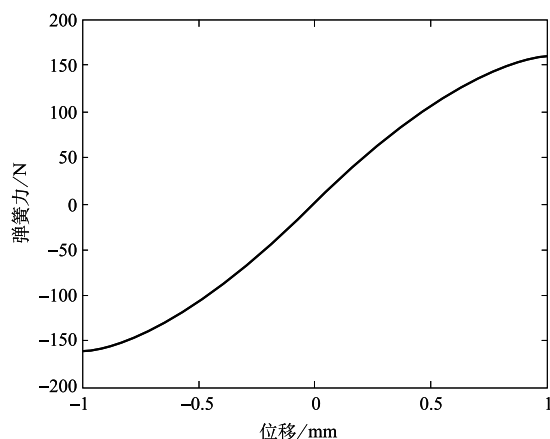


图8 拟合得到的弹簧力曲线
Fig.8 Fitted curve of spring force

4 结束语

从结构刚度非线性问题出发,提出一种对结构固有频率随激振力幅值变化问题的分析方法,通过算例分析表明了由该方法得到的结果准确有效,为地面共振试验中频率测量结果的甄别及飞机模型的建模分析提供了可靠的理论参考依据。

AST

参考文献

- [1] 陈艳峰,郑建华,吴新跃. 非线性 Duffing 方程自由振动频率解分析[J]. 海军工程大学学报,2008,20(3):93-98.
CHEN Yanfeng, ZHENG Jianhua, WU Xinyue. Study on frequency

solution of nonlinear Duffing equation [J]. Journal of Naval University of Engineering, 2008, 20(3): 93-98. (in Chinese)

- [2] LIN Jianguo. A new approach to Duffing equation with strong and high order nonlinearity [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 1999, 4(16): 132-135.
[3] 石晶,郝际平,吴子燕. 一类非线性振动 Duffing 方程的精确解[J]. 机械科学与技术, 2008, 27(6):764-765.
SHI Jing, HAO Jiping, WU Ziyang. Exact solution for a class of nonlinear vibration Duffing equation [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2008, 27(6):764-765. (in Chinese)
[4] 苏荣华,彭晨宇. 振动筛橡胶弹簧非线性刚度实验及仿真研究[J]. 应用基础与科学学报,2011,19(6):986-993.
SU Ronghua, PENG Chenyu. Experiment and simulation research on nonlinear stiffness of vibrating screen rubber spring [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2011, 19(6): 986-993. (in Chinese)
[5] Khadem S E, Rezaee M R. Non-linear free vibration analysis of a string under bending moment effects using the perturbation method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 254(4):677-691.

作者简介

秦锦(1988—)男,硕士,助理工程师。主要研究方向:结构环境与动力学试验。

Tel: 029-86832797

E-mail: qjinmail@163.com

The Determination Method of Non-linear System's Spring Force

QIN Jin*, ZHANG Yujie, GAO Hong

AVIC The First Aircraft Institute, Xi'an 710089, China

Abstract: With the problem of structural natural frequency is not a constant in ground resonance test, an analysis method for non-linear structural stiffness system was suggested. Through this method, force function and properties of non-linear system can be obtained with measured structural frequency and force amplitude. Finally the example demonstrated the effectiveness and feasibility of the method.

Key Words: non-linear; spring; frequency; encourage force; transfer function

Received: 2016-06-23; Accepted: 2016-06-29

*Corresponding author. Tel. : 029-86832797 E-mail: qjinmail@163.com