

DOI: 10.19452/j.issn1007-5453.2017.03.034

基于有限元法的高速测扭器动力学分析

彭航*, 秦剑波

中航飞机股份有限公司研发中心, 陕西 西安 710089

摘要: 综合考虑了旋转轴的扭转、陀螺效应以及剪切变形的影响。应用有限元法, 推导了变截面梁的单元矩阵, 建立了通用的单转子动力学理论模型, 研究了高速测扭系统的转子动力学特性。通过不平衡响应分析, 得到其振动响应幅值较大的位置节点; 采用四阶 Runge-Kutta 算法对转子启动过程进行了数值仿真, 得到其通过临界转速时的瞬态响应。计算结果表明, 在该测扭器的工作转速范围内会出现两阶临界转速, 且位于测扭轴中间位置的节点为振动敏感点。该分析结果为分析测扭转子系统的动力学特性、避免共振发生提供了参考。

关键词: 测扭器; 转子; 有限元; 临界转速

中图分类号: TH16 文献标识码: A 文章编号: 1007-5453 (2017) 03-0034-07

动力学分析是高速转子结构设计的重要内容, 压气机作为典型的高速旋转部件广泛应用于燃气涡轮发动机中。在压气机试验台中经常设置扭矩测量装置, 用以测量发动机转子输出扭矩, 以标定压气机的功率及扭矩特性。作为压气机试验台核心部件, 测扭系统同样具有高速旋转特性, 是典型的转子部件, 其动力学特性对整个压气机试验台的测试及标定精度影响很大, 其设计优劣对试验台的精确测量及可靠运行有着直接关系。

转子动力学是研究所有与旋转机械及其附件动力学特性有关的一门学科, 其中, 转子系统的建模与计算方法是该学科的重要内容^[1,2]。Jeffcott^[3]首先提出了 Jeffcott 模型并解释了其动力学特性, 发现了转子超临界状态工作时产生自动定心的现象。PROHL^[4]将解决盘轴振动的初参数法推广到轴的弯曲振动问题上, 从而能够定量计算临界转速。师名林^[5]采用商用有限元软件 ANSYS 对一电机主轴进行转子动力学分析, 分别研究了陀螺效应对转子系统临界转速及陀螺效应对转子质量不平衡动响应的影响。缪红燕^[6]基于 Jeffcott 模型对转子中心运动的解析表达式进行推导, 得到了转子启动过程最大振幅与启动加速度的减幅特性以及

共振区迟滞特性。Zhao Sanxing^[7]考虑了转子刚度和阻尼, 并以四阶 Runge-Kutta 法模拟转子运动, 对瞬态响应和不平衡响应进行了研究。Gan Chunbiao^[8]基于蒙特卡洛方法对 Jeffcott 转子的偏移建立了随机矩阵模型, 并对临界转速和振动幅值进行了研究。Mohammad H J^[9]对具有一定几何和力学性能的高速转子用三维有限元模型、一维梁单元模型和模态实验进行分析, 研究了转子的临界转速及不平衡响应。

对于转子动力学的研究主要集中在对 Jeffcott 转子模型的临界转速与不平衡响应分析。本文应用 Timoshenko 梁模型, 综合考虑扭转与剪切变形对转子振动特性影响, 采取有限元的方法建立节点五自由度的高速转子动力学模型; 计算该高速测扭系统临界转速、求解并绘制出其振型图与不平衡响应图; 最后对其加速瞬态动力学行为进行了研究。计算结果为压气机测扭转子结构设计及其动力学优化提供了理论和数值依据。

1 测扭器工作原理及其转子结构

相位差式扭矩传感器具有高精度、高重复性等特点, 因此, 经常在压气机台架试验中使用其来测定输出扭矩。测扭

收稿日期: 2016-10-11; 退修日期: 2016-12-29; 录用日期: 2017-02-09

* 通讯作者. Tel.: 029-86832923 E-mail: penghang1225@163.com

引用格式: PENG Hang, Qin Jianbo. The dynamic analysis of high speed torque meter based on the Finite Element Method[J]. Aeronautical Science & Technology, 2017, 28 (03): 34-40. 彭航, 秦剑波. 基于有限元法的高速测扭器动力学分析 [J]. 航空科学技术, 2017, 28 (03): 34-40.

结构主要由扭矩传递轴、扭矩传感器、电气控制装置等组成，图 1 为测扭原理图。

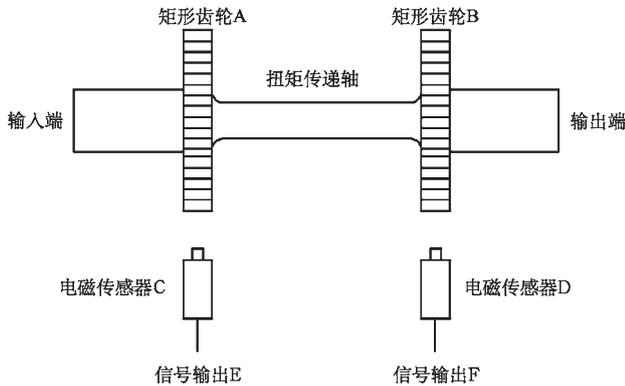


图 1 测扭原理图

Fig.1 The schematic diagram of torque measuring

当测扭器不受外加转矩时，两个矩形齿轮的相对位置保持不变，相应的电磁传感器中的感应相位差为零或某一固定数值。当有外加转矩时，两个齿轮的相对位置将发生改变，传感器接受两个非接触式交流信号。取出信号的相位差，运用数字信号处理技术就能精确地测出所承受的扭矩。

图 2 为压气机试验台高速测扭器系统结构图，其转速范围为 0~28000r/min。其主要由主轴、2 个矩形齿轮以及 4 个滚棒轴承组成。推力盘用来平衡压气机产生的轴向力。2 个矩形齿轮的中间段即为扭矩测量轴，其具有薄壁、变截面的特点。

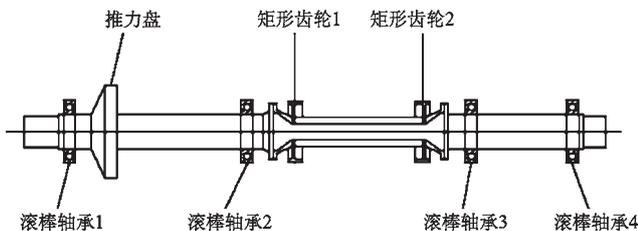


图 2 测扭器结构图

Fig.2 The structure diagram of torque meter

转子主轴主要参数为：轴系总长 $L=1.85\text{m}$ ，矩齿轮质量 0.047kg ，转动惯量 $0.015\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。密度 $\rho=7800\text{kg/m}^3$ ，弹性模量 $E=2.1\times 10^{11}\text{Pa}$ ，剪切模量 $G=7.8\times 10^{10}\text{N/m}^2$ ，泊松比 $\nu=0.27$ 。4 个滚棒轴承的主刚度系数均为 $K_b=4.5\times 10^8\text{N/m}$ ，主阻尼系数为 $2.8\times 10^3\text{N}\cdot\text{s/m}$ 。

2 轴段有限元模型

2.1 等直径轴单元运动方程

图 3 为等直径轴段单元，其单元广义坐标为：

$$q^e = [x_1^e \quad y_1^e \quad \theta_{x1}^e \quad \theta_{y1}^e \quad \phi_1^e \quad x_2^e \quad y_2^e \quad \theta_{x2}^e \quad \theta_{y2}^e \quad \phi_2^e]^T$$

式中： e 为单元编号； x, y 为平动位移； θ_x, θ_y 为弯曲角度； ϕ 为扭转角度； d 为单元内直径； D 为单元外直径。

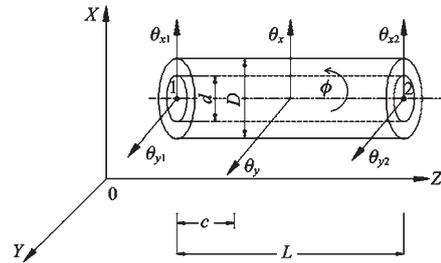


图 3 等直径轴单元

Fig.3 The constant diameter shaft unit

根据 Timoshenko 梁理论，微元段的动能与势能表达式为：

$$dT^e = \frac{1}{2}[u(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J_d(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2)]dc + \frac{1}{2}[J_p\Omega(\dot{\theta}_x\theta_y - \theta_x\dot{\theta}_y) + J_p\Omega^2 + J_p\dot{\phi}^2]dc \quad (1)$$

$$dU^e = \frac{1}{2}EI(\theta_x'^2 + \theta_y'^2)dc + \frac{1}{2}GA_s[(x' - \theta_y')^2 + (y' + \theta_x')^2]dc + \frac{1}{2}GI_p\phi'^2dc \quad (2)$$

式中： $A_s = \frac{A}{6(1+\nu)\left[1 + \frac{20+12\nu}{7+6\nu}\left(\frac{Dd}{D^2+d^2}\right)^2\right]}$ ； u 为单位长度

质量； A 为轴单元面积； I 为单元截面惯性矩； E 为弹性模量； G 为剪切模量； L 为轴单元长度； c 为长度变量； Ω 为转速。

对式 (1)、式 (2) 沿单元全长积分，得到含平动、弯曲和扭转运动的轴单元动能与势能表达式为：

$$T^e = \frac{1}{2}[\dot{q}^e]^T ([M_r^e] + [M_\Omega^e])[\dot{q}^e] + \frac{1}{2}\Omega[\dot{q}^e]^T [J^e][\dot{q}^e] + \frac{1}{2}[\dot{q}^e]^T [M_\phi^e][\dot{q}^e] \quad (3)$$

$$U^e = \frac{1}{2}[\dot{q}^e]^T [K^e][\dot{q}^e] \quad (4)$$

式中： $[M_r^e]$ 为轴单元平动质量矩阵； $[M_\Omega^e]$ 为轴单元弯曲质量矩阵； $[M_\phi^e]$ 为轴单元扭转质量矩阵； $[J^e]$ 为陀螺力矩阵； $[K^e]$ 为包含弯曲与剪切的轴单元刚度矩阵。

将式 (3)、式 (4) 代入 Lagrange 方程，得到轴单元运动方程：

$$[M^e]\{\ddot{q}^e\} + \Omega[J^e]\{\dot{q}^e\} + [K^e]\{q^e\} = \{Q^e\} \quad (5)$$

式中： $[M^e]$ 为轴单元质量矩阵； $\{Q^e\}$ 为外部力矢量。

2.2 变直径轴单元运动方程

图4所示为变直径轴单元,其直径、截面面积等参数随轴单元长度而发生变化。

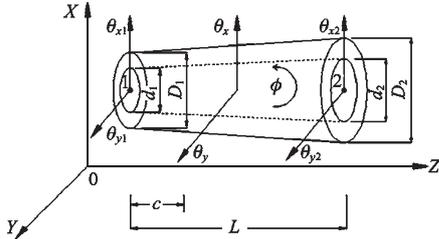


图4 变直径轴单元
Fig.4 The variable diameter shaft unit

外径:

$$D = \frac{D_2 - D_1}{L} c + D_1 \quad (6)$$

内径:

$$d = \frac{d_2 - d_1}{L} c + d_1 \quad (7)$$

轴单元截面面积:

$$A = \frac{1}{4} \pi \left[\left(\frac{D_2 - D_1}{L} c + D_1 \right)^2 - \left(\frac{d_2 - d_1}{L} c + d_1 \right)^2 \right] \quad (8)$$

单元长度质量:

$$u = \rho A \quad (9)$$

极转动惯量:

$$J_p = \frac{1}{8} u \left[\left(\frac{D_2 - D_1}{L} c + D_1 \right)^2 + \left(\frac{d_2 - d_1}{L} c + d_1 \right)^2 \right] \quad (10)$$

轴单元截面极惯性矩:

$$I_p = \frac{\pi}{32} \left[\left(\frac{D_2 - D_1}{L} c + D_1 \right)^4 - \left(\frac{d_2 - d_1}{L} c + d_1 \right)^4 \right] \quad (11)$$

式中: D_1, D_2 为不同外直径; d_1, d_2 为不同内直径。

变直径条件下,将以上参数重新代入微元段的动能与势能表达式,并沿单元全长积分,得到新的轴单元动能、势能表达式。代入 Lagrange 方程中形成变直径轴单元运动微分方程。

3 测扭转子模型建立及结果分析

3.1 测扭转子整体运动微分方程

图5为测扭器轴单元有限元模型,在变截面、质量集中点以及轴承支撑处设置节点,从左至右共计32个节点,每个节点5个自由度,共计160个自由度。

160个自由度表示有限元模型包含160个二阶微分方程,将其化为矩阵形式,形成半带宽为10的 160×160 稀疏带状矩阵,将盘单元与轴承单元分别加至对应节点处,形成转子系统的总体运动微分方程:

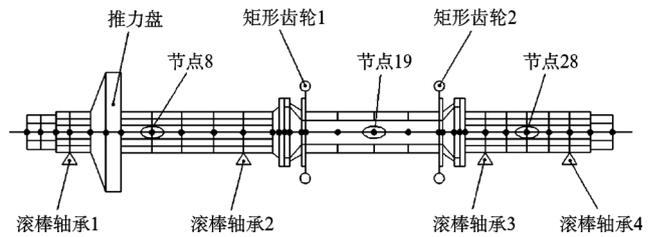


图5 测扭器有限元模型
Fig.5 The Finite Element Model of torquemeter

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (12)$$

3.2 临界转速分析

将转子系统总体微分方程(12)右端项取零,建立如式(13)所示的微分方程:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (13)$$

对于式(13)这种大型稀疏带状矩阵的特征值问题,一般采用降阶的方式将二阶微分方程组化为一阶微分方程组的标准特征值问题来求解,取:

$$D = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

运用 MATLAB 软件的 eig 函数求解式(14)的特征值与特征向量,所得到的特征值与特征向量均为共轭成对的复数。特征值的实部代表稳定性,虚部代表给定转速下的弯曲或扭转涡动频率。

图6为测扭转子的坎贝尔图,横轴代表转子转速,纵轴代表涡动频率。在陀螺力矩的影响下,弯曲振动的正向涡动与反向涡动会成对出现,而陀螺力矩对扭转振动没有影响,所以扭转涡动曲线始终为一条直线。

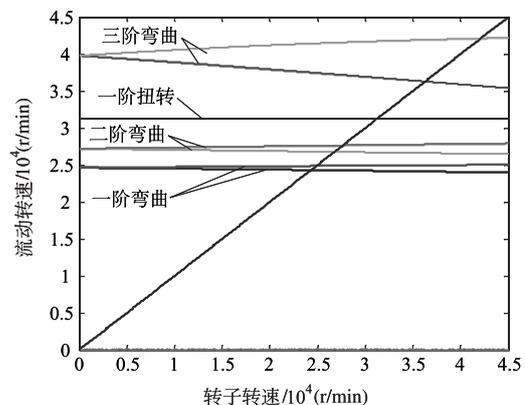


图6 坎贝尔图
Fig.6 Campbell chart

由图6可见,在设定的 $0 \sim 45000 \text{r/min}$ 范围内共出现三阶弯曲涡动和一阶扭转涡动。表1为其对应的弯曲以及扭转临界转速,在测扭系统启动以及正常工作时,应快速通过或避开前两阶转速值。

表 1 坎贝尔图临界转速
Table 1 The critical rotational speed of Campbell chart

阶次	转速 / (r/min)
一阶弯曲振动	23754.7
二阶弯曲振动	26385.7
一阶扭转振动	31598.3
三阶弯曲振动	40191.2

前三阶弯曲振型如图 7 所示,由图中可以看出,轴承 1 与轴承 2 之间的 8 号节点、轴承 2 与轴承 3 的 19 号节点以及轴承 3 与轴承 4 之间的 28 节点具有较大振幅。

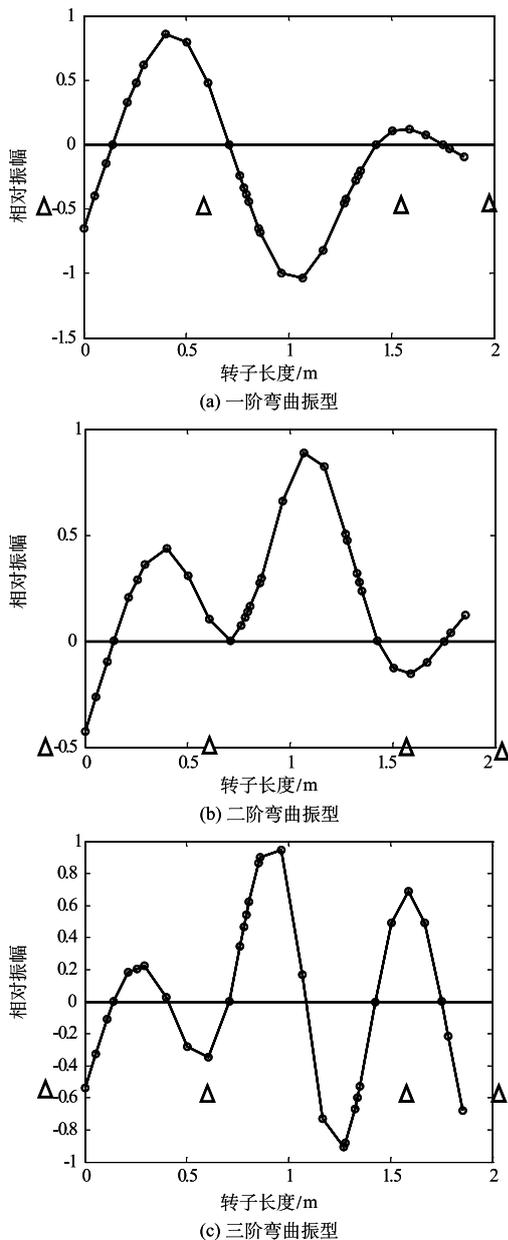


图 7 弯曲振型图

Fig.7 The vibration mode chart of bending

3.3 不平衡响应分析

转子-轴承系统稳态不平衡响应是转子-轴承系统在其结构本身存在的不平衡量所产生的激励力作用下的频率响应特性。一般情况,在不平衡响应的激励下,转子运行过程中只会出现同步正向涡动。存在不平衡量时,其振动方程如式(12)所示,其为二阶非齐次线性微分方程组。其解由两部分组成,一部分为 Q 为 0 时的齐次方程通解 $\{x_1\}$,其为瞬态响应,由于系统阻尼的存在,它会随着时间的增加逐渐衰减到零。另一部分为非齐次方程的特解 $\{x_2\}$,它是一种持续的等幅振动,是稳态响应,其频率与激振力的频率相同。所以,一般情况下只讨论稳态响应。不平衡响应分析时,式(12)中 Q 可表示成如下形式:

$$Q = Q_m \cos \Omega t + Q_n \sin \Omega t \quad (15)$$

式中:

$$Q_m = [H\Omega^2 \cos \varphi \quad H\Omega^2 \sin \varphi \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$Q_n = [-H\Omega^2 \sin \varphi \quad H\Omega^2 \cos \varphi \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

H 为不平衡量; φ 为初始相位角。

设方程的稳态解为:

$$q = q_m \cos \Omega t + q_n \sin \Omega t \quad (16)$$

将式(16)代入式(12),整理可得:

$$\begin{bmatrix} -M\Omega^2 + K & C\Omega \\ -C\Omega & -M\Omega^2 + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_m \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

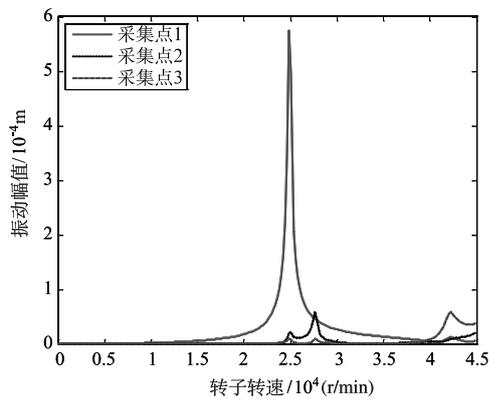
求解式(17),并从 q_m 和 q_n 提取出 x 和 y 方向分量,即得到不平衡响应幅值。

设在轴承 1 与轴承 2 之间的 8 号节点、轴承 2 与轴承 3 的 19 号节点以及轴承 3 与轴承 4 之间的 28 号节点(见图 5)分别为振动采集节点 1、2 和 3。现分别对这 3 个节点施加 $50g \cdot cm$ 的不平衡量,并采集上述 3 个点的频响,得到其不平衡响应,如图 8 所示。

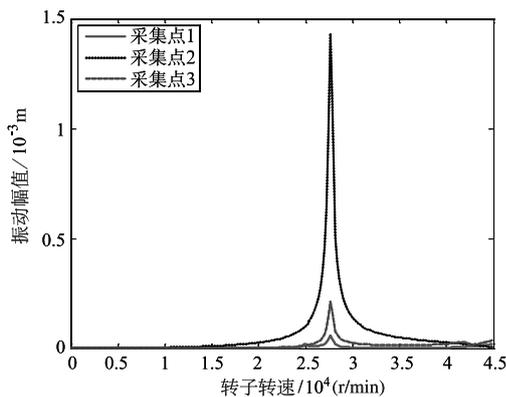
由图 8 可知,在 $0 \sim 45000r/min$ 范围内,共出现 3 处波峰值,且相应阶次的波峰对应的转速值非常接近,其结果如表 2 所示。相同大小的不平衡量施加于采集点 2 上产生的振幅最大,其振幅为 $1.49 \times 10^{-3}m$,其余采集点的振幅基本在 $6 \times 10^{-4}m$ 以下。

3.4 瞬态响应分析

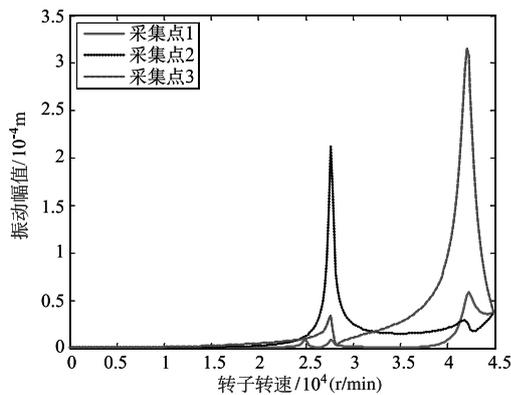
启动加速是最常见的瞬态过程,转子受不平衡作用力与惯性力共同作用,在转子启动过程中,假设转速变化为线性的,即角加速度为常数,描述转子系统瞬态特性的运动方程为:



(a) 采集点1加不平衡质量时各点频响



(b) 采集点2加不平衡质量时各点频响



(c) 采集点3加不平衡质量时各点频响

图8 不平衡响应图

Fig.8 The unbalance response chart

表2 不平衡响应临界转速

Table 2 The critical rotational speed of unbalance response

阶次	转速 / (r/min)
一阶波峰	23760.4
二阶波峰	26358.0
三阶波峰	40301.0

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mr(\Omega^2 \cos \Omega t - a \sin \Omega t) \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = mr(\Omega^2 \sin \Omega t + a \cos \Omega t) \end{cases} \quad (18)$$

式中: m , c , k 分别为不平衡质量、外阻尼和轴刚度; r 为质量偏心距; $a = \Omega$ 为角加速度。

利用 Runge-Kutta 法对测扭器转子系统进行计算。实际建立的动力学方程组式 (18) 为二阶微分方程。在具体计算时,为适应 MATLAB 的 ODE45 函数格式要求,需对其进行降阶处理,将二阶微分方程转化为一阶微分方程。

令:

$$V = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (19)$$

则:

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}C\dot{q} - M^{-1}Kq + M^{-1}F \end{bmatrix} \quad (20)$$

将式 (20) 写成 Matlab 函数 ODE45 的标准函数形式,取所有节点的初始位移与初始速度均为 0,可求得 3 个采集节点的瞬态振动位移随转子转速变化规律。

在采集点 1、采集点 2 以及采集点 3 处同时施加 $50g \cdot cm$ 的不平衡量,启动加速度为 $150r/s^2$,仿真时间为 5s,得到如图 9 所示的 3 个节点的瞬态加速响应图。

从图 9 的瞬态位移可以发现,最大瞬态位移出现在采集点 2 的启动过程中,其振幅为 $1.48 \times 10^{-3}m$,与图 8 (b) 2 号采集点的幅值接近。图 9 瞬态响应图中共出现 3 个波峰值,对应波峰转速值如表 3 所示。在实际的转子启动过程中,发生最大幅值的转速随着加速度的增大而加大^[10]。文中仿真时间为 5s,转速由 0 变为 $45000r/min$ 中,加速度明显偏大,对比表 3 与表 1、表 2 的临界转速可发现,瞬态加速响应的共振转速相对于测扭器系统的临界转速有所延迟。

4 结束语

本文结论如下:

(1) 建立了变截面情况下的转子动力学微分方程,并通过坎贝尔图、不平衡响应、瞬态响应对压气机测扭器转子系统进行了动力学分析,得到了测扭器系统的临界转速,在测扭器的启动过程以及正常工作时应快速通过或避开前两阶临界转速。

(2) 通过测扭器的振型图分析发现,靠近轴承支撑中间位置的 8 节点、19 节点以及 28 节点振动幅值较大,为易振动部位;通过不平衡响应与加速瞬态响应分析可知,当测扭器转速为二阶临界转速时,19 节点为振动幅值最大点,在实际测试中应重点监控该位置。

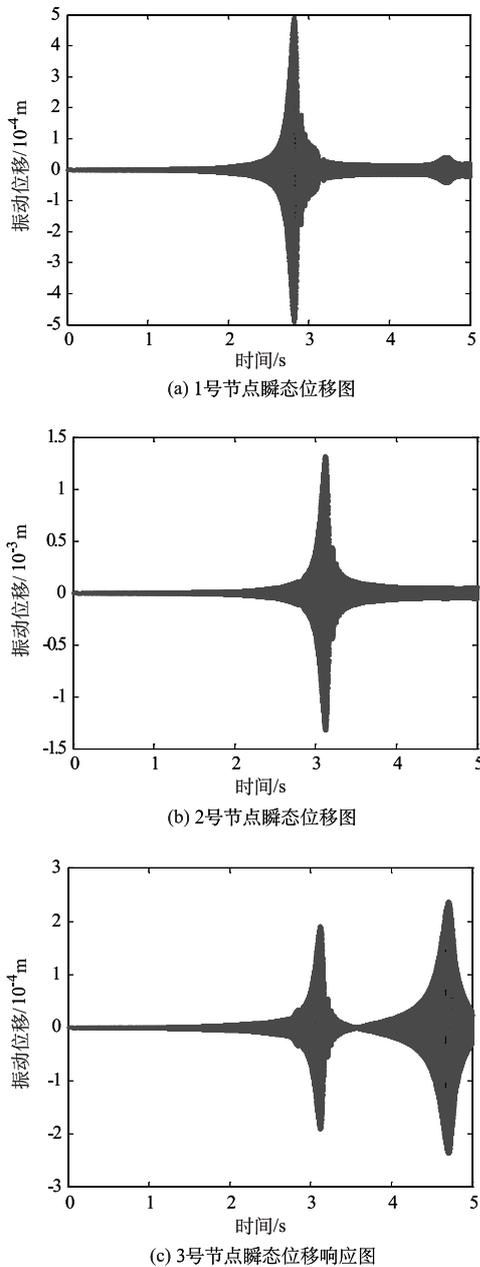


图9 瞬态响应图

Fig.9 The transient response chart

表3 瞬态响应临界转速

Table 3 The critical rotational speed of transient response

阶次	转速 / (r/min)
一阶波峰	24581.0
二阶波峰	27551.7
三阶波峰	41084.1

参考文献

[1] 钟一谔. 转子动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
Zhong Yie. Rotor dynamics[M]. Beijing: Tsinghua University

Press, 1987. (in Chinese)

[2] Forsthoffer B W E . Critical speeds and rotor response[M]. Forsthoffer' s Rotating Equipment Handbooks, 2005 (3) : 213-224.

[3] Jeffcott H H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed the effect of want of balance[J]. Philosophical Magazine, 1919, 37: 304-314.

[4] PROHL M A. A general method for calculating critical speeds of flexible rotors [J].ASME Journal of Applied Mechanics, 1945, 67: 142-148.

[5] 师名林. 基于 ANSYS 的大型屏蔽电机泵转子系统建模及动力学分析 [J]. 机械科学与技术, 2013, 32 (3) : 358-361.
SHI Minglin. Dynamic analysis and modeling of large-scale canned motor pump rotor based on ANSYS[J]. Mechanical Science and Technology, 2013, 32 (3) : 358-361. (in Chinese)

[6] 缪红燕, 高金吉, 徐鸿. 转子系统瞬态不平衡响应的有限元分析 [J]. 振动与冲击, 2004, 23 (3) : 2-5.
MIU Hongyan, GAO Jinji, XU Hong. Unbalanced response of transient rotor system based on the finite element [J].Journal of Vibration and Shock, 2004, 23 (3) : 2-5. (in Chinese)

[7] ZHAO Sanxing, HUA Xu. Stability and response analysis of symmetrical single-disk flexible rotor-bearing system [J]. Tribology International, 2005, 38 (8) : 749-756.

[8] GAN Chunbiao. Nonparametric modeling and vibration analysis of uncertain Jeffcott rotor with disc offset[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014 (78) : 126-134.

[9] Jalali M H, Ghayour M . Dynamic analysis of a high speed rotor-bearing system[J]. Measurement, 2014 (53) : 1-9.

[10] 熊万里, 闻邦椿, 段志善. 转子系统瞬态过程的减幅特性及共振区迟滞特性 [J]. 振动与冲击, 1999, 18 (4) : 12-15.
XIONG Wanli, WEN Bangchun, DUAN Zhishan. The properties of reduction of amplitude and the delay of resonance region during the process of rotor system[J]. Journal of Vibration and Shock, 1999, 18 (4) : 12-15. (in Chinese)

作者简介

彭航(1990—) 男, 硕士, 助理工程师。主要研究方向: 飞机结构强度设计。

Tel: 029-86832923

E-mail: penghang1225@163.com

秦剑波(1981—) 男, 硕士, 高级工程师。主要研究方向: 飞机结构强度设计。

The Dynamic Analysis of High Speed Torquemeter Based on the Finite Element Method

PENG Hang*, Qin Jianbo

AVIC Aircraft CO., LTD. R&D Center, Xi'an 710089, China

Abstract: The influence of the axial torsion, gyroscopic motion and the shear to the rotor were considered. The model was founded by the Finite Element Method (FEM) and the element matrix was derived for the variable section of the rotor shaft. The dynamic characteristic of the high speed torsional system was researched. The location of the node with large vibration amplitude were obtained by the unbalance response analysis. The dynamic response of the speeding up rotor was calculated using the fourth order Runge-Kutta algorithm, and the transient response was got when the rotor was breaking through the critical speed. The results indicate that within the scope of operating speed two order critical speed exists in the torquemeter. And the center of the shaft is sensitive to the vibration. The paper can provide a useful reference to measure the dynamic response characteristics of the torsion system and to avoid the occurrence of resonance.

Key Words: torquemeter; rotor; FEM; critical rotational speed

Received: 2016-10-11; Revised: 2016-12-29; Accepted: 2017-02-09

*Corresponding author. Tel. :029-86832923 E-mail: penghang1225@163.com