# 航空发动机 µ 控制器设计及降阶方法 研究

刘振刚<sup>1,\*</sup>,崔丽娜<sup>2</sup>,郭政波<sup>1</sup>

1. 中国飞行试验研究院,陕西西安 710089

2. 航空工业西安飞机工业(集团)有限公司,陕西西安 710089

**摘 要:**涡扇发动机的多变量控制是目前的研究热点。为了研究鲁棒镇定发动机的结构化摄动和非结构化摄动对系统稳定 性影响,采用结构奇异值理论分析方法,通过设置合理的加权函数,设计性能最优的µ控制器。采用内部平衡截项法、残 化法和 Hankel- 范数近似法等对控制器模型降级处理,通过分析奇异值与范数误差,选取合适的降级方法,以保证降阶后系 统能够稳定工作。仿真结果表明,所设计的控制器能够使系统稳定工作,系统能鲁棒镇定结构化摄动和非结构化摄动,且 具有良好的控制品质,且控制器降阶后对系统基本没有影响。

关键词:涡扇发动机;鲁棒镇定; µ理论; D-K 迭代; Hankel-范数近似

#### 中图分类号: V233.7 文献标识码: A 文章编号: DOI: 10.19452/j.issn1007-5453.2018.02.034

航空发动机不确定性主要分为结构参数不确定性和非 结构参数不确定性<sup>[1]</sup>,其结构参数不确定性问题一直是控制 系统设计的难点。在航空发动机控制系统设计中,执行机构 模型一般假设为延迟环节或者一阶惯性环节,当发动机高频 工作时,会不可避免地引入一些不确定因素;另外,在设计 控制器过程中,传感器的老化延迟等都会对系统带来影响, 考虑到这些问题,结构奇异值是一种很好的对策<sup>[2]</sup>。本文对 结构奇异值理论进行简要论述,并利用鲁棒性度量工具µ分 析对µ综合方法设计的航空发动机控制器进行验证分析。

#### 1 发动机线性模型的建立

研究某型双转子涡扇发动机,其气动热力非线性模型 可用状态空间描述为:

 $\left(\dot{\boldsymbol{X}}=f\left(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}\right)\right)$ 

$$Y = g(X, U)$$

式中:X为二维状态矢量,即风扇转速n<sub>f</sub>和高压压气机转 子转速n<sub>c</sub>;U为三维输入矢量,即主供油量W<sub>f</sub>、尾喷管喉部 面积A8、可调压气机静子叶片角度VGV;Y为三维输出矢 量,即高压涡轮出口总温*T*<sub>14</sub>、压气机压比 PR 和风扇喘振裕度 SMF。用小偏差模型在平衡点线性化,得到的状态空间模型为:

$$\begin{cases} \Delta \dot{X} = A \Delta X + B \Delta U \\ \Delta Y = C \Delta X + D \Delta U \end{cases}$$
  
$$\vec{x} \div : x = \begin{bmatrix} n_{\rm f} & n_{\rm c} \end{bmatrix}^{\rm T}, y = \begin{bmatrix} T_{\rm t4} & {\rm PR} & {\rm SMF} \end{bmatrix}^{\rm T},$$

## 2 µ 方法与 D-K 迭代

实际对象可以看作对象模型集合 **G**中的一个元素。结构 化不确定摄动 △ 描述了系统对象与标称模型的偏离程度<sup>[3-5]</sup>。 这个摄动可由不同性质的不确定元素构成。若系统在不同 位置出现了同类的不确定性,可以用重复摄动块将这些不确 定性连接起来。考虑系统的标准线性分式描述,如图1所示。

P代表了系统的开环连接,包含所有已知的环节,它包括 标称对象模型、不确定性模型、性能和不确定性加权函数; Δ 表示有范数有界的结构化不确定性集合; K 为控制器。其中 P有三个输入: 摄动 p、扰动 d 和控制 u; 三个输出: 摄动 w、 误差 e 和测量输出 y,则被控系统集可用 LFT 形式描述如下:

 $\left\{F_{u}\left(P,\Delta\right):\Delta\in\underline{\Delta},\,\Delta\right\}$ 

收稿日期:2017-11-15; 退修日期:2018-01-05; 录用日期:2018-01-18

\*通信作者.Tel.: 15891443625 E-mail: 726773089@qq.com

引用格式: Liu Zhengang, Cui Lina, Guo Zhengbo. Research on aeroengine μ controller design and reduction method[J]. Aeronautical Science & Technology, 2018, 29 (02): 34–38. 刘振刚,崔丽娜,郭政波. 航空发动机μ控制器设计及降阶方法研究[J]. 航空科学技术, 2018, 29 (02): 34–38.



图 1 控制问题的 LTF 描述 Fig.1 LTF description of the control system

设计目的是为了完成一个稳定的控制器 K,使闭环系统

对与某类不确定结构 $\tilde{\Delta} \in \underline{\Delta}(\|\tilde{\Delta}\|_{c} < 1)$ 是稳定的,且满足:

 $F_u\left(F_l\left(P,K\right), ilde{\Delta}\right)_u \leq 1$ 

目前,µ综合的有效近似方法是"D-K 迭代",迭代过程如下:

(1) 保持 D(s) 不变,优化问题

 $\min_{k \in \mathbb{R}^{d}} DF_l(P,K) D^{-1}$  "等价于:

 $\min_{k \notin i \in \mathbb{N}} F_i(P, K)$ 

它实际上是H<sub>∞</sub>优化控制问题,可以通过求解两个 Riccati 方程得到。

(2) 保持 K 不变

已知稳定的 K,则优化下面的问题:

 $\min_{D=D} \overline{\sigma} \left[ DF_1(P,K) D^{-1} \right]$ 

(3) 拟合 D 中每个元素的幅值,使得 D 是稳定的最小 相位传递函数,然后返回步骤(1)。

持续迭代直至满意的性能,或H。范数不再减小。该方法的一个根本问题是:虽然在每个最小化步骤都是凸的,但不能保证总体是凸的。因此,迭代有可能收敛到一个局部最优点。

# 3 控制器设计

在μ综合设计过程中,其中的一个难点是对不确定性的描述<sup>60</sup>。控制器的结构如图2所示。



图 2 航空发动机的控制结构 Fig.2 Aeroengine control structure

由于选用航空发动机的模型为三输入三输出的,因 此,分块结构可确定为: Δ 由三个表示输入不确定性 Δ<sub>1</sub>的 1×1的子块和一个表示性能 Δ<sub>P</sub>的3×3子块构成。且图 中频率加权函数 W<sub>1</sub>反映了模型中不确定性在指定频率范 围内的权重,若其为对角阵,则反映了单个输入通道(执行 机构)的不确定性。W<sub>P</sub>为性能权函数。

在设计过程中,需要对权函数进行调试,通过反复验 证,最终输入不确定系统加权函数和性能权函数选为:



按照 D-K 迭代思路开始迭代,整个迭代过程的具体值 见表 1。

#### 表 1 迭代过程参数变化情况 Table 1 Iteration process parameters change

迭代次数	1	2	3	4	5
控制器阶数	8	8	18	24	24
D阶数	0	0	10	16	16
y 值	5.94	3.19	1.48	1.16	1.02
$\max \mu$	5.09	2.11	1.26	1.06	0.97

最终的控制器为24阶的,由于篇幅有限,这里就不再赘述。

# 4 仿真算例

当给定控制器 *K* 时,系统的灵敏度函数以及补灵敏度 函数<sup>[7]</sup> 的奇异值如图 3 所示。



图 3 系统的灵敏度函数与补灵敏度函数的奇异值

Fig.3 The singular value of the sensitivity function and the complement sensitivity function

从图中可以看出,系统对于乘性输入不确定性具有良好的鲁棒性。此外,由表1可知,迭代5次后,系统μ的峰值为0.972,因此,系统的稳定性和鲁棒性能均满足设计要求。

加入摄动后,摄动对象的传递函数为:

G'(s) = G(s)E(s)

式中:*E*(*s*)=*I*+*w*<sub>i</sub>Δ,表示输入不确定性的对角型传递函数 矩阵。考虑到不确定权函数在低频处存在 50% 的误差,因 此,在误差范围内的输入增益摄动是容许的。为了验证控制 器的有效性,选择"最坏"的情况,即摄动增益选择为最大, 此时,系统不确定性传递函数矩阵为:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

在这种情况下,对航空发动机控制系统进行仿真分析, 结果如图4所示。





图中,虚线代表输入存在 50% 的摄动时系统的阶跃响 应,实线为无摄动时标称系统的阶跃响应,从图中可以看出, 当没有摄动时,控制系统的上升时间为 3s,系统具有较快的 响应速度,且耦合度良好。加入"最坏"情况下的摄动后,系 统的阶跃响应基本没有太大的变化,因此,系统对结构化不 确定性有较强的鲁棒性。

## 5 模型降阶的方法

从第4节可知,最后的μ控制器的阶数高达24阶,这 主要是因为采用的某型航空发动机是两状态三输入三输出 的受控系统(含有三个不确定性摄动块),且拟合尺度矩阵 有8个状态,因此,控制器的阶数会由原来的8阶骤然增至 24阶,显然,这样的控制器在实际应用中基本不可实现,因 此,有必要对控制器进行降阶处理<sup>[8,9]</sup>。本文将分别应用内 部平衡截项法、残化法和 Hankel-范数近似法对 μ 控制器进 行降阶,之后选出最优的降阶方法。

令(*A*, *B*, *C*, *D*) 表示稳定系统*G*(*s*) 的实现,并将*n* 维状态矢量*x* 划分为:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$$

式中:x2表示希望移除的 n-k 个状态构成的矢量。通过适当的划分 A, B 和 C, 相应的状态空间模型为:

$$\dot{\mathbf{x}}_{1} = A_{11}\mathbf{x}_{1} + A_{12}\mathbf{x}_{2} + B_{1}\mathbf{u}$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{2} = A_{21}\mathbf{x}_{1} + A_{22}\mathbf{x}_{2} + B_{2}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{x}_{2} = A_{11}\mathbf{x}_{1} + A_{22}\mathbf{x}_{2} + B_{2}\mathbf{u}$$

实现 $G \triangleq (A, B, C, D)$ 的 k 阶截项可以由 $G_a \triangleq (A_{11}, B_1, C_1, D)$ 给 出。 截 项 模 型  $G_a$  在 无 穷 大 频 率 处 等 于 G, 即  $G(\infty) = G_a(\infty) = D$ ,除此之外,在一般情况下,和  $G_a$ 间并无特 殊关系。然而,当 A 为 Jordan 标准形时,很容易地对状态排 序,使得  $x_2$  对应于高频或快速模态。

在截项中,丢弃了所有与 $x_2$ 有关的状态和动态行为,现 在假设 $\dot{x}_2=0$ ,即在状态空间方程中残化 $x_2$ ,那么可以用 $x_1$ 和u求解 $x_2$ ,然后把 $x_2$ 代到状态方程中,可得:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{1} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\mathbf{x}_{1} + (B_{1} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{2})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = (C_{1} - C_{2}A_{22}^{-1}A_{21})\mathbf{x}_{1} + (D - C_{2}A_{22}^{-1}B_{2})\mathbf{u} \\ \text{@  $\mathcal{W} = A_{11} \overrightarrow{\mathsf{P}} \overrightarrow{\mathsf{U}}, \overrightarrow{\mathsf{H}} \overrightarrow{\mathsf{E}} \overrightarrow{\mathsf{V}}: \\ A_{r} \triangleq A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ B_{r} \triangleq B_{1} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{2} \\ C_{r} \triangleq C_{1} - C_{2}A_{22}^{-1}A_{21} \\ D_{r} \triangleq D - C_{2}A_{22}^{-1}B_{2} \end{cases}$$$

降阶模型  $G_a \triangleq (A_r, B_r, C_r, D_r)$ 称为 G(s)的残化。通过 上式可以看出,残化的一个重要性质是它能够维护系统的稳 态增益保持不变,即  $G(0)=G_a(0)$ 。因此,在高频段有精度要 求时,模型截项较为可取,而残化更适合低频建模。

在 Hankel- 范 数 近 似 法 中, 假 设 (*A*, *B*, *C*, *D*) 为 渐 进 稳 定 系 统 *G*(*s*) 的 最 小 实 现, 其 Hankel 奇 异 值 满 足:  $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_k \ge \sigma_{k+1} = \sigma_{k+2}, \cdots \ge \sigma_{k+l+1} \ge \cdots, \ge \sigma_n > 0,$ 且已排序,则此时系统的 Gramian 矩阵为:

Σ = diag ( $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots, \sigma_n$ ) ≜diag ( $\Sigma_1 + \sigma_{k+1}I$ ) 对 (A, B, C, D) 进行划分, 使其与∑保持一致, 定义 
$$\begin{split} (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) \mathcal{H} : \\ & \hat{A} \triangleq \Gamma^{-1} \left( \sigma_{k+1}^{2} A_{11}^{T} + \Sigma_{1} A_{11} \Sigma_{1} - \sigma_{k+1} C_{1}^{T} U B_{1}^{T} \right) \\ & \hat{B} \triangleq \Gamma^{-1} \left( \Sigma_{1} B_{1} - \sigma_{k+1} C_{1}^{T} U \right) \\ & \hat{C} \triangleq C_{1} \Sigma_{1} + \sigma_{k+1} U B_{1}^{T} \\ & \hat{D} \triangleq D - \sigma_{k+1} U \\ & \exists \ \mathbf{p} : U \& - \mathbf{h} \ \mathbf{j} \And B_{2} = -C_{2}^{T} U \text{ is } - \mathbf{h} \ \mathbf{j} \nvDash \mathbf{j} . \end{split}$$

式中: $U = - \gamma$  满 定  $B_2 = -C_2 U$ 的一个 酉 矩 阵。且  $\Sigma \triangleq \Sigma_1^2 - \sigma_{k+1}^2 I_0$ 由上式可知,矩阵A有 k 个 "稳定的"特征值 (位于 LHP),那么:

$$G_{h}^{k}(s) + F(s) = \left[\frac{\hat{A} \mid \hat{B}}{\hat{C} \mid \hat{D}}\right]$$

式中:  $G_{h}^{k}(s)$  是一个 k 阶且稳定的最优 Hankel 范数近似, F(s) 是一个 n-k-1 阶的稳定传递函数, G 与最优近似  $G_{h}^{k}$  间 误差的 Hankel 范数等于 G 的第 k+1 个 Hankel 奇异值:

 $\left\|G-G_{h}^{k}\right\|_{H}=\sigma_{k+1}\left(G\right)$ 

# 6 µ 控制器的降阶实现与分析对比

现在分别用这三种算法对μ控制器进行降阶处理,将 降阶后模型的阶数 π选为6。图5分别给出了利用截项、残 化和最优 Hankel 范数近似获得的降阶模型和全阶模型的奇 异值关于频率的变化曲线,可以看出,残化后的系统与原系 统在稳态匹配得很好,而截项与最优 Hankel 范数近似的系 统与原系统在全状态的匹配度都比较好。





针对这三种不同的近似,图6给出了误差系统(K-K<sub>a</sub>)的奇异值。

根据图 6 可知,通过截项法计算的误差系统的范数为 0.3223,对应的频率为 2.4rad/s。通过残化法计算的误差 系统的范数为 0.5224,对应的频率为 0.2rad/s。通过最优 Hankel 范数计算的误差系统的范数为 0.66,对应的频率为 10rad/s。由于航空发动机的闭环带宽大概为 10rad/s,因此, 对于一个良好的控制器设计,该频率附近的误差应尽可能 小。因此,Hankel-最优范数法并不适合于该问题。比较截 项法和残化法,残化法对应的误差更大。为了使降阶后的 系统更加逼近原有系统,最终选择的降阶方法为截项法。



图 6 误差系统的奇异值 Fig.6 Singular values of the error system

将降阶后的控制器作用于航空发动机时,系统的阶跃 响应如图 7 所示。





对比与图 4 与图 7,不难发现,通过截项法降阶后的控制器的性能基本接近与全阶控制器,因此,通过这种方法对 μ控制器进行降阶是可行的。

#### 7 结论

本文详细介绍了结构奇异值理论,并将其理论应用到 结构复杂、工作环境恶劣的航空发动机控制系统中,之后介 绍了鲁棒结构奇异值控制器的设计过程。研究表明,用 *μ* 综合设计的控制器对结构化不确定性具有良好的鲁棒性。 考虑到所设计的控制器阶次过高,对其进行降阶处理;通 过平衡截项法、残化法以及最优 Hankel- 范数近似法将 24 阶控制器降阶到6阶,对降阶后的控制器与原有控制器在 奇异值,误差范数方面进行了比较,选择出最优的降阶方法。 然后对选择的降阶控制器进行仿真分析,结果表明降阶后的 控制器性能与全阶控制器性能基本保持一致。

#### 参考文献

- 孙护国,樊思齐.航空发动机固定阶混合μ控制器设计方法的研究 [J].西北工业大学学报,2004,22 (6),769-773.
   Sun Huguo, Fan Siqi. On designing fixed-order mixed μ robust controller for turbofan engine [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2004, 22 (6): 769-773. (in Chinese)
- [2] Nataraj P S V, Srivastava S. A quadratic inequality approach for design of robust controller for a parametric uncertain jet engine[C]// IEEE Region 10 Annual International Conference, Proceedings, 2003, 289–293.
- [3] Doyle J C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties [J]. IEEE Proceedings Part D, 1982, 129: 242–250.
- Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference, transformation, multiplicatic seminorms and aroximate inverses[J].
   IEEE Transaction on Automatic control, 1981, 26: 301–320.
- [5] Balas G L. Linear parameter-varying control and its application

to a turbofan engine [J]. International Journal of robust and Nonlinear Control, 2002 (12): 793-796.

[6] 王永庭. 涡扇发动机多变量鲁棒控制系统研究 [D]. 西安: 西 北工业大学, 2006.

Wang Yongting. Aero engine multivariable robust control research[D].Xi' an: Northwestern Polytechnical University, 2006. (in Chinese)

- [7] Packard A K, Pandey P. Continuity properties of the real/ complex structured singular value [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38 (3): 215–220.
- [8] Van Dooren P, Gallivan K A, AbsilP A. H2-optimal modelreduction with higher order poles[J]. SIAM Journal on Matrix Analysisand Applications, 2010, 31 (05): 2738–2753.
- [9] Safonov M G, Chiang R Y. A schur method for balanced truncation model reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34 (7): 729–733.

#### 作者简介

刘振刚(1991-) 男,硕士,助理工程师。主要研究方向: 航空发动机工作特性试飞。 Tel: 15891443625 E-mail: 726773089@qq.com

# Research on Aeroengine $\mu$ Controller Design and Reduction Method

Liu Zhengang<sup>1, \*</sup>, Cui Lina<sup>2</sup>, Guo Zhengbo<sup>1</sup>

1. Chinese Flight Test Establishment, Xi'an 710089, China

2. AVIC Xi'an Aircraft Industry (Group) Co., Ltd., Xi'an 710089, China

**Abstract:** Aeroengine multivariable control is the current research focus. In this paper, based on the structure singular value theory, the structural perturbation and unstructured perturbation of aeroengine were analyzed. The optimal  $\mu$  controller is finally obtained by setting the weighting function reasonably. Afterwards, the controller model is reduced by using internal balance cut-off method, residue method and Hankel-norm approximation method. Select the appropriate downgrade method to ensure that the system can work stably after order-reduced by analyzing singular value and norm error. The simulation results show that the designed controller can make the system work steadily, the system can robustly stabilize structured perturbation and unstructured perturbation, and has good control quality. The controller has no influence on the system after order-reduced.

Key Words: turbofan engine, robust stabilization,  $\mu$  theory, D-K iteration, Hankel-norm approximation

 Received:
 2017-11-15;
 Revised:
 2018-01-05;
 Accepted:
 2018-01-18

 \*Corresponding author.Tel.:
 15891443625
 E-mail:
 726773089@qq.com